

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Escola de Engenharia de São Carlos

**Contribuições ao projeto de dentes de concreto armado
mediante modelagem numérica**

Larissa Oliveira Santos

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) da Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

LARISSA OLIVEIRA SANTOS

Contribuições ao projeto de dentes de concreto armado mediante modelagem numérica

VERSÃO CORRIGIDA

A versão original encontra-se na Escola de Engenharia de São Carlos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo para obtenção de título de Mestre em Ciências.

Área de concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Mounir Khalil El Debs

Coorientador: Prof. Dr. Alex Micael Dantas de Sousa

SÃO CARLOS - SP

2025

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

S237c Santos, Larissa Oliveira
Contribuições ao projeto de dentes de concreto armado mediante modelagem numérica / Larissa Oliveira Santos; orientador Mounir Khalil El Debs; coorientador Alex Micael Dantas de Sousa. São Carlos, 2025.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) e Área de Concentração em Estruturas -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2025.

1. Dentes de concreto. 2. Abaques. 3. Armadura de suspensão. 4. Armadura de costura. 5. Recomendações de projeto. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidata: Bacharela **LARISSA OLIVEIRA SANTOS**.

Título da dissertação: "Contribuição ao projeto de dentes de concreto armado mediante modelagem numérica".

Data da defesa: 02/07/2025.

Comissão Julgadora

Resultado

Prof. Titular Mounir Khalil El Debs
(Orientador)

(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC-USP)

Aprovada

Prof. Dr. Pablo Augusto Krahl

(Universidade Presbiteriana Mackenzie/UPM - Campus
Campinas)

Aprovada

Prof. Dr. Armando Lopes Moreno Junior

(Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP)

Aprovada

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas):

Prof Associado **Ricardo Carrazedo**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:

Prof. Titular **Carlos De Marqui Junior**

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, porque não há um só dia em que o seu amor, a presença, a misericórdia, a bondade, o cuidado e a provisão não se manifestem. Soli Deo Gloria!

Agradeço aos meus pais. Estou certa de que a melhor maneira de honrá-los é persistindo na fé, na educação e no exemplo que me foram ensinados. Obrigada por me aproximarem daquilo que é verdadeiramente divino: o amor e o favor imerecidos. Estendo esse agradecimento a toda a minha família, em especial a tia Socorro, a tio Sérgio e a tia Paula. Obrigada pelo apoio.

Agradeço ao professor Mounir Khalil El Debs, pelo tempo, paciência e orientação. É uma verdadeira honra ser ensinada pelo senhor. Agradeço ainda ao professor Alex Sousa, cujas contribuições e orientações foram indispensáveis.

Agradeço à minha comunidade de fé, a Oikos, por ser casa para tantos peregrinos em São Carlos, onde não há solidão. Agradeço aos tantos irmãos e amigos, ao PG e a Vagner pelo discipulado, bom serviço e companhia no Caminho. Coisas eternas são enraizadas aqui.

Agradeço à sala ME-04 por dividir risadas, lágrimas e incontáveis histórias. Camila, Clara, Denisson, Geraldo, Júlia, Paulinho, Rodrigo e Talita, tudo foi muito melhor por causa de vocês.

Agradeço ao CEPI, a escola que me ensinou a ler e a escrever, e ao corpo docente do Departamento de Engenharia Civil da Universidade Federal de Sergipe, pela formação recebida durante a graduação.

Agradeço à Escola de Engenharia de São Carlos e ao Departamento de Engenharia de Estruturas pelo curso de mestrado, bem como ao CNPq – Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – pela concessão da bolsa.

RESUMO

SANTOS, L.O. **Contribuições ao projeto de dentes de concreto armado mediante modelagem numérica.** 2025. Dissertação (Mestrado em Ciências – Engenharia Civil – Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2025.

Os dentes de concreto são elementos estruturais essenciais no projeto de estruturas pré-moldadas, particularmente em ligações do tipo viga-viga e viga-pilar. Quando o dimensionamento e o detalhamento das armaduras não são adequadamente executados, tornam-se pontos críticos, suscetíveis à ruína. No entanto, ainda há incertezas quanto ao comportamento estrutural e aos critérios de dimensionamento e detalhamento desses elementos. Nesse contexto, este trabalho tem como objetivo contribuir ao projeto de dentes de concreto armado por meio de modelagem numérica no software ABAQUS. Foram investigadas: i) a influência do espalhamento da armadura de suspensão no comportamento estrutural dos dentes; ii) a eficácia das armaduras de costura na resistência e na ductilidade dos elementos; e iii) a verificação das tensões de compressão no concreto. O modelo numérico proposto foi calibrado com base em resultados experimentais disponíveis na literatura e, inicialmente, apresentou razão média entre a força numérica e a força experimental igual a 1,23, com coeficiente de variação de 31%. Observou-se, contudo, sensibilidade ao parâmetro de cisalhamento experimental $F_{exp}/(b \cdot d \cdot f_c)$, sendo que, após correção relacionada a esse parâmetro, o erro foi ajustado para 1,00, com coeficiente de variação reduzido para 14%. Em comparação aos principais modelos analíticos utilizados nas práticas de projeto, o modelo numérico corrigido apresentou melhor aderência aos resultados experimentais, destacando-se especialmente nos casos de ruptura por compressão. Verificou-se que o espalhamento da armadura até $0,33d_{viga}$ não compromete a capacidade resistente dos dentes. Quanto à armadura de costura, sua presença foi fundamental no controle da propagação de fissuras, embora ganhos expressivos de resistência e ductilidade tenham ocorrido apenas para maiores parâmetros de cisalhamento. Para tensões de cisalhamento de $0,20f_c$, as tensões alcançadas nos modelos numéricos foram limitadas, em média, a $0,17f_c$. Validou-se, ainda, metodologia da literatura para verificação das tensões de compressão no concreto, a qual apresentou boa compatibilidade com os resultados numéricos (razão média de 1,18 e coeficiente de variação de 27%).

Palavras-chave: Dentes de concreto. Abaqus. Armadura de suspensão. Armadura de costura. Recomendações de projeto.

ABSTRACT

SANTOS, L.O. **Contributions to the design of reinforced concrete dapped end beams through numerical modeling.** 2025. Dissertation (M. Sc. in Civil Engineering – Structural Engineering) – São Carlos School of Engineering. University of São Paulo, São Carlos, 2025.

Dapped-end beams are essential structural elements in the design of precast concrete buildings, particularly in beam-to-beam and beam-to-column connections. When reinforcement design and detailing are not properly executed, these regions become critical points, susceptible to failure. Besides, uncertainties remain regarding their structural behavior and the criteria for their design and detailing. In this context, this work aims to contribute to the design of reinforced concrete dapped-end beams through numerical modeling using ABAQUS software. The following aspects were investigated: (i) the influence of hanger reinforcement spreading on structural behavior; (ii) the effectiveness of horizontal secondary reinforcement in improving strength and ductility; and (iii) the verification of compressive stresses in concrete. The proposed numerical model was calibrated using experimental data from the literature and initially showed an average ratio of numerical to experimental peak load of 1.23, with a coefficient of variation of 31%. The model showed sensitivity to the experimental shear parameter $F_{exp}/(b \cdot d \cdot f_c)$; after applying a correction based on this parameter, the error was adjusted to 1.00, with the coefficient of variation reduced to 14%. Compared to common analytical models used in design practice, the corrected numerical model showed better agreement with experimental results, particularly in compression failure cases. It was found that spreading the hanger reinforcement up to $0.33d_{beam}$ does not compromise the load capacity of the dapped-end beams. Regarding secondary horizontal reinforcement, its presence was crucial in controlling crack propagation, although significant gains in strength and ductility were observed only for higher shear parameters. For shear stresses of $0.20f_c$, the stresses reached in the numerical models were limited, on average, to $0.17f_c$. Furthermore, a methodology from the literature for verifying concrete compressive stresses was validated, showing good compatibility with numerical results (average ratio of 1.18 and coefficient of variation of 27%).

Keywords: Dapped-end beam. Abaqus. Hanger reinforcement. Horizontal secondary reinforcement. Design recommendations.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Ligações com dentes de concreto.....	23
Figura 2 – Designação dos parâmetros geométricos de dentes de concreto.....	23
Figura 3 – Potenciais modos de falha do dente de concreto.....	29
Figura 4 – Modos de ruptura de dentes de concreto.....	30
Figura 5 – Influência da relação h/h_v no comportamento do dente de concreto.....	30
Figura 6 – Regiões B e D.	31
Figura 7 – Modelos de bielas e tirantes para avaliação dos esforços internos.	32
Figura 8 – Modelo de bielas e tirantes proposto por Cook e Mitchell (1988).....	33
Figura 9 – (a) Modelo de bielas e tirantes proposto pela FIP (1999); (b) Modelo sugerido por Mattock.....	33
Figura 10 – Modelo de bielas e tirantes proposto por Lu et al. (2003).	34
Figura 11 – Detalhes dos dentes de concreto testados por Peng (2009).....	35
Figura 12 – Modelo de bielas e tirantes proposto por Falcón, Pallarés e Miguel (2019).....	36
Figura 13 – Modelo atrito-cisalhamento em dentes de concreto.....	36
Figura 14 – Esquema das forças do modelo atrito-cisalhamento.....	37
Figura 15 – Modelo de bielas e tirantes de dente de concreto segundo ABNT NBR 6118:2023.	42
Figura 16 – Detalhe da armadura de dente de concreto de acordo com ABNT NBR 9062:2017.	46
Figura 17 – Modelos de transmissão de forças e da disposição das armaduras segundo El Debs (2017).	48
Figura 18 – Arranjos das armaduras dos dentes de concreto segundo El Debs (2017).....	50
Figura 19 – Delimitação das regiões com descontinuidades geométricas e de carregamento.	51
Figura 20 – Classificação dos nós.	52
Figura 21 – Região nodal.	52
Figura 22 – Modelo de bielas e tirantes para dentes de concreto.....	53
Figura 23 – Região com tensões de compressão transversal ou sem tensões transversais.....	57
Figura 24 – Região com tensões de tração transversal.....	57
Figura 25 – Nó comprimido sem tirante.....	59
Figura 26 – Nó sujeito à compressão e à tração com armadura em uma direção.....	59
Figura 27 – Nó sujeito à compressão e à tração com armadura em duas direções.....	59

Figura 28 – Esquema dos ensaios realizados por Falcón, Pallarés e Miguel (2019).....	60
Figura 29 – Esquema do detalhamento das armaduras das vigas de Falcón, Pallarés e Miguel (2019).	62
Figura 30 – Esquema dos ensaios realizados por Rajapakse, Degée e Mihaylov (2022).....	63
Figura 31 – Esquema do detalhamento das armaduras das vigas de Rajapakse, Degée e Mihaylov (2022) – dimensões em mm.	64
Figura 32 – Esquema dos ensaios realizados por Lu, Lin e Yu (2012).....	65
Figura 33 – Esquema do detalhamento das armaduras das vigas de Lu, Lin e Yu (2012).....	65
Figura 34 – a) Geometria do dente de concreto e chapas metálicas, b) configuração das armaduras e c) interações no modelo.	68
Figura 35 – Discretização da malha com elementos finitos com tamanho a) 20 mm, b) 25 mm, c) 30 mm e d) 35 mm.	69
Figura 36 – Comparação entre o padrão de fissuração do modelo experimental DEB-1.4 e dos modelos numéricos com base na distribuição das deformações plásticas para diferentes tamanhos da malha.	70
Figura 37 – Modelo constitutivo utilizado para o aço.	71
Figura 38 – Força × deslocamento do atuador experimental e numérico para os modelos de Falcón, Pallarés e Miguel (2019).....	73
Figura 39 – Padrão de fissuração experimental e numérico para os modelos de Falcón, Pallarés e Miguel (2019).	76
Figura 40 – Força × deslocamento do atuador obtido numericamente para os modelos de Rajapakse, Degée e Mihaylov (2022).....	79
Figura 41 – Padrão de fissuração experimental e numérico para os modelos de Rajapakse, Degée e Mihaylov (2022).	81
Figura 42 – Força × deslocamento do atuador experimental e numérico para os modelos de Lu, Lin e Yu (2012).	83
Figura 43 – Sensibilidade do modelo numérico ao parâmetro de cisalhamento na previsão da força última dos dentes.	86
Figura 44 – Resultados numéricos corrigidos.	86
Figura 45 – Modelo de bielas e tirantes para dentes curtos a partir da ABNT NBR 9062:2017.	90
Figura 46 – Braço de alavanca z da força do tirante segundo ABNT NBR 9062:2017.....	92
Figura 47 – Parâmetros geométricos do Modelo I.	99
Figura 48 – Parâmetros geométricos do Modelo II.	100

Figura 49 – Parâmetros geométricos do Modelo III.....	100
Figura 50 – Nó A para Modelos II e III.....	101
Figura 51 – Nó B para Modelos II e III.....	102
Figura 52 – Nó C para Modelos II e III.....	104
Figura 53 – Parâmetros geométricos do Modelo IV.....	107
Figura 54 – Nó A para Modelo IV.	108
Figura 55 – Nó B para Modelo IV.....	108
Figura 56 – Parâmetros geométricos dos dentes de concreto analisados.	117
Figura 57 – Geometrias analisadas – unidades em mm.....	117
Figura 58 –Variação do espalhamento da armadura de suspensão para o dente com razão ae/d igual a 0,6 – unidades em mm.	119
Figura 59 – Efeito do espalhamento da armadura de suspensão para dente de concreto com razão $ae/d= 0,22$: a) curva força x deslocamento e b) padrão de fissuração.	120
Figura 60 – Efeito do espalhamento da armadura de suspensão para dente de concreto com razão $ae/d= 0,28$: a) curva força x deslocamento e b) padrão de fissuração.	120
Figura 61 – Efeito do espalhamento da armadura de suspensão para dente de concreto com razão $ae/d= 0,33$: a) curva força x deslocamento e b) padrão de fissuração.	121
Figura 62 – Efeito do espalhamento da armadura de suspensão para dente de concreto com razão $ae/d= 0,4$: a) curva força x deslocamento e b) padrão de fissuração.	121
Figura 63 – Efeito do espalhamento da armadura de suspensão para dente de concreto com razão $ae/d= 0,5$: a) curva força x deslocamento e b) padrão de fissuração.	122
Figura 64 – Efeito do espalhamento da armadura de suspensão para dente de concreto com razão $ae/d= 0,6$: a) curva força x deslocamento e b) padrão de fissuração.	122
Figura 65 – Tensão nas armaduras do dente $ae/d = 0,6$ para diferentes espalhamentos nos instantes de a) força de escoamento da armadura de suspensão e b) força última.	123
Figura 66 – Análise da sensibilidade das curvas de força x deslocamento para espalhamentos entre $0,33d_{viga}$ e $0,20d_{viga}$ dos dentes com ae/d iguais a a) 0,22 e b) 0,60.	126
Figura 67 – Efeito do espalhamento da armadura de suspensão para dente de concreto com razão $ae/d= 0,6$ para f_c igual a a) 30,0 MPa, b) 32,2 MPa, c) 40,4 MPa, d) 49,6 MPa.....	127
Figura 68 – Influência na carga última variando as armaduras de costura para o dente $ae/d = 0,22$ com f_c igual a 40,4 MPa.....	130
Figura 69 – Influência na carga última variando as armaduras de costura para o dente $ae/d = 0,60$ com f_c igual a 40,4 MPa.....	131

Figura 70 – Deformações plásticas dos dentes com $ae/d = 0,60$ e espalhamento da armadura de suspensão de $0,25d_{viga}$: a) com armadura de costura; b) sem armadura de costura – Caso 1.	132
Figura 71 – Deformações plásticas dos dentes com $ae/d = 0,60$ e espalhamento da armadura de suspensão de $0,25d_{viga}$: a) com armadura de costura; b) sem armadura de costura – Caso 2.	133
Figura 72 – Deformações plásticas dos dentes com $ae/d = 0,60$ e espalhamento da armadura de suspensão de $0,25d_{viga}$: a) com armadura de costura; b) sem armadura de costura – Caso 3.	134
Figura 73 – Influência das armaduras de costura na carga última para o dente com $ae/d = 0,60$ com f_c igual a: a) 30,0 MPa, b) 32,2 MPa, c) 40,4 MPa, d) 49,6 MPa – Caso 1.	137
Figura 74 – Influência das armaduras de costura na carga última para o dente com $ae/d = 0,60$ com f_c igual a: a) 30,0 MPa, b) 32,2 MPa, c) 40,4 MPa, d) 49,6 MPa – Caso 2.	138
Figura 75 – Influência das armaduras de costura na carga última para o dente com $ae/d = 0,60$ com f_c igual a: a) 30,0 MPa, b) 32,2 MPa, c) 40,4 MPa, d) 49,6 MPa – Caso 3.	139
Figura 76 – Tensão de compressão no concreto da viga com dente $ae/d = 0,22$ para diferentes espalhamentos no instante de força última.	142
Figura 77 – Tensão de compressão no concreto da viga com dente $ae/d = 0,6$ para diferentes espalhamentos no instante de força última.	143
Figura 78 – Caminhos utilizados para análise da tensão de compressão no concreto ao longo da seção da viga para os espalhamentos de a) $0,10d_{viga}$, b) $0,25d_{viga}$ e c) $0,50d_{viga}$	143
Figura 79 – Tensões de compressão no concreto ao longo da altura da viga no instante de força última para dente com ae/d igual a a) 0,22 e b) 0,60.	144
Figura 80 – a) Definições geométricas e b) sistema de forças para cálculo da resultante de compressão na região do dente, conforme proposta de Silva (2017).	147

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Coeficiente da biela β_s	54
Tabela 2 – Fator de modificação de confinamento biela-nó β_c	54
Tabela 3 – Armadura distribuída mínima.	55
Tabela 4 – Coeficiente da região nodal.	56
Tabela 5 – Coeficiente k	58
Tabela 6 – Parâmetros geométricos e f_c – Falcón, Pallarés e Miguel (2019).	61
Tabela 7 – Propriedades do aço – Falcón, Pallarés e Miguel (2019).	61
Tabela 8 – Detalhamento das armaduras – Falcón, Pallarés e Miguel (2019).	62
Tabela 9 – Parâmetros geométricos e f_c – Rajapakse, Degée e Mihaylov (2022).	63
Tabela 10 – Propriedades do aço – Rajapakse, Degée e Mihaylov (2022).	65
Tabela 11 – Parâmetros geométricos e f_c – Lu, Lin e Yu (2012).	66
Tabela 12 – Propriedades do concreto – Lu, Lin e Yu (2012).	66
Tabela 13 – Propriedades do aço – Lu, Lin e Yu (2012).	66
Tabela 14 – Detalhamento das armaduras – Lu, Lin e Yu (2012).	67
Tabela 15 – Relação F_{exp}/F_{calc} das simulações do DEB-1.4 para diferentes tamanhos da malha.	69
Tabela 16 – Modelos de tensão-deformação e parâmetros de plastificação para calibração do modelo numérico.	72
Tabela 17 – Comparação entre força última e mecanismo de falha experimentais e numéricos para os modelos de Falcón, Pallarés e Miguel (2019).	78
Tabela 18 – Comparação entre força última e mecanismo de falha experimentais e numéricos para os modelos de Rajapakse, Degée e Mihaylov (2022).	82
Tabela 19 – Comparação entre força última e mecanismo de falha experimentais e numéricos para os modelos de Lu, Lin e Yu (2012).	84
Tabela 20 – Comparação entre força última experimental e a numérica corrigida.	87
Tabela 21 – Comparação entre as forças de ruína experimentais e analíticas de acordo com a ABNT NBR 9062:2017.	93
Tabela 22 – Mecanismos de falha analíticos segundo ABNT NBR 9062:2017 e experimentais.	95
Tabela 23 – Comparação entre as forças de ruína experimentais e analíticas de acordo com El Debs (2017).	97
Tabela 24 – Mecanismos de falha analíticos segundo El Debs (2017) e experimentais.	98

Tabela 25 – Comparação entre as forças de ruína experimentais e analíticas de acordo com ACI 318:2019.	105
Tabela 26 – Mecanismos de falha analíticos segundo ACI 318:2019 e experimentais.	106
Tabela 27 – Comparação entre as forças de ruína experimentais e analíticas de acordo com NP EN 1992-1-1:2010.	110
Tabela 28 – Mecanismos de falha analíticos segundo EN 1992-1-1:2010 e experimentais. .	111
Tabela 29 – Média e coeficiente de variação da relação F_{exp}/F_{calc} para cada procedimento de cálculo.....	112
Tabela 30 – Resultados de F_{exp}/F_{calc} de acordo com os mecanismos de falha do dente de concreto.	113
Tabela 31 – Resultados de τ_{wu}/f_c dos dentes que sofreram ruína por compressão para cada procedimento analítico.	114
Tabela 32 – Relação a/d em função do espalhamento da armadura de suspensão.	117
Tabela 33 – Relação $F_{última}/F_{dim}$ em função do espalhamento da armadura de suspensão.	124
Tabela 34 – Relação $F_{esc}/F_{última}$ em função do espalhamento da armadura de suspensão.	124
Tabela 35 – Força última em função do espalhamento da armadura de suspensão para diferentes valores de f_c no dente com ae/d igual a 0,6.....	128
Tabela 36 – Relação $F_{última}/F_{dim}$ em função do espalhamento da armadura de suspensão, com e sem armadura de costura, para o dente com ae/d igual a 0,22.....	135
Tabela 37 – Relação $F_{última}/F_{dim}$ em função do espalhamento da armadura de suspensão, com e sem armadura de costura, para o dente com ae/d igual a 0,6.....	135
Tabela 38 – Força última em função do espalhamento da armadura de suspensão para diferentes valores de f_c no dente com $ae/d = 0,6$ – Caso 1.	140
Tabela 39 – Força última em função do espalhamento da armadura de suspensão para diferentes valores de f_c no dente com $ae/d = 0,6$ – Caso 2.	140
Tabela 40 – Força última em função do espalhamento da armadura de suspensão para diferentes valores de f_c no dente com $ae/d = 0,6$ – Caso 3.	140
Tabela 41 – Tensão de compressão na região nodal superior da biela do dente com $ae/d = 0,22$ para diferentes espalhamentos no instante de força última.	145
Tabela 42 – Tensão de compressão na região nodal superior da biela do dente com $ae/d = 0,6$ para diferentes espalhamentos no instante de força última.	145

Tabela 43 – Comparação entre os resultados numéricos e analíticos segundo Silva (2017) de tensão de compressão no concreto.....	148
---	-----

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	22
1.1	Considerações iniciais	22
1.2	Objetivos	24
1.2.1	Objetivo geral	24
1.2.2	Objetivos específicos	24
1.3	Justificativa	24
1.4	Metodologia	25
1.5	Estrutura do texto	26
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	28
2.1	Comportamento estrutural dos dentes de concreto	28
2.2	Modelo de bielas e tirantes	31
2.3	Modelo atrito-cisalhamento	36
2.4	Pesquisas recentes sobre dentes de concreto	38
2.5	Procedimentos de projeto para dentes de concreto	42
2.5.1	ABNT NBR 6118:2023 e ABNT NBR 9062:2017	42
2.5.2	El Debs (2017)	46
2.5.3	ACI 318:2019	50
2.5.4	EN 1992-1-1:2010	56
3	ANÁLISE NUMÉRICA	60
3.1	Modelos experimentais	60
3.1.1	Falcón, Pallarés e Miguel (2019)	60
3.1.2	Rajapakse, Degée e Mihaylov (2022)	62
3.1.3	Lu, Lin e Yu (2012)	65
3.2	Modelo numérico	67
3.2.1	Geometria, condições de contorno e interface	67
3.2.2	Malha	68
3.2.3	Propriedades e modelos constitutivos dos materiais	70
3.2.4	Resultados dos ensaios experimentais e das simulações numéricas	73
3.2.4.1	Falcón, Pallarés e Miguel (2019)	73
3.2.4.2	Rajapakse, Degée e Mihaylov (2022)	79
3.2.4.3	Lu, Lin e Yu (2012)	83
3.2.4.4	Sensibilidade do modelo numérico ao parâmetro de cisalhamento	85

4 ANÁLISE DOS MODELOS TEÓRICOS DE PREVISÃO DA CAPACIDADE RESISTENTE DOS DENTES.....	90
4.1 ABNT NBR 9062:2017 e ABNT NBR 6118:2023.....	90
4.2 El Debs (2017)	95
4.3 ACI 318:2019	99
4.4 EN 1992-1-1:2010.....	106
4.5 Análise comparativa entre os resultados experimentais, numéricos e analíticos	112
5 ANÁLISES PARAMÉTRICAS.....	116
5.1 Considerações gerais	116
5.2 <i>Script</i> em Python	116
5.3 Dentes de concreto analisados	116
5.4 Propriedade dos materiais	118
5.5 Fator de correção.....	118
5.6 Influência da distribuição da armadura de suspensão	119
5.6.1 Resultados da análise em função da geometria	119
5.6.2 Resultados da análise em função das propriedades do concreto	126
5.7 Influência das armaduras de costura	128
5.7.1 Resultados da análise em função da geometria	129
5.7.2 Resultados da análise em função das propriedades do concreto	136
5.8 Verificação das tensões de compressão no concreto.....	141
5.8.1 Resultados da análise da tensão de compressão no concreto	142
5.8.2 Análise da verificação das tensões de compressão no concreto proposta por Silva (2017)	146
6 CONCLUSÕES.....	150
6.1 Sugestões para trabalhos futuros	153
REFERÊNCIAS	154

1 INTRODUÇÃO

1.1 Considerações iniciais

As técnicas construtivas de um país estão fortemente relacionadas com o seu desenvolvimento social e econômico e com a sua cultura. No Brasil, diversos desafios são enfrentados no âmbito da construção civil, como baixa produtividade, falta de mão de obra qualificada e altos índices de acidentes de trabalho. Esses empecilhos ressaltam a importância de reformas e investimentos no setor para promover um crescimento mais sustentável e seguro.

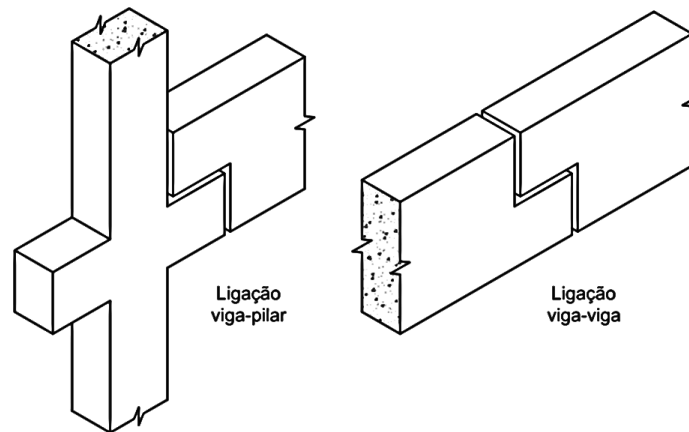
A industrialização da construção civil apresenta soluções significativas para esse problema, tais como aumento da produtividade, otimização do uso de materiais, rigoroso controle de qualidade e valorização da mão de obra. Essa abordagem possibilita construções mais eficientes, redução do desperdício de materiais e dos custos associados.

Entre os sistemas estruturais relacionados à industrialização da construção civil, destaca-se o formado por elementos de concreto pré-moldado. Atualmente, a pré-fabricação do concreto tem se destacado não apenas em setores tradicionais, como obras industriais, mas também na expansão de aeroportos, construção de estações de metrô, pontes, viadutos, túneis, passarelas, estádios, escolas e habitações, torres de geração de energia eólica e fachadas de alto padrão estético.

Apesar das inúmeras vantagens associadas à sua aplicação, a necessidade de realizar ligações entre os elementos é o ponto que demanda maior atenção e preocupação por parte dos projetistas. As ligações das estruturas de concreto pré-moldado são responsáveis pela transferência de forças entre os elementos fabricados separadamente quando a estrutura é submetida às solicitações. Entre os componentes de ligação, estão os consolos e os dentes.

Os dentes de concreto, ou dentes Gerber, são amplamente utilizados para as ligações do tipo viga-pilar, em que a extremidade da viga é apoiada na almofada de apoio sobre o consolo do pilar, e para as ligações entre duas vigas. Essas ligações estão ilustradas na Figura 1.

Figura 1 – Ligações com dentes de concreto

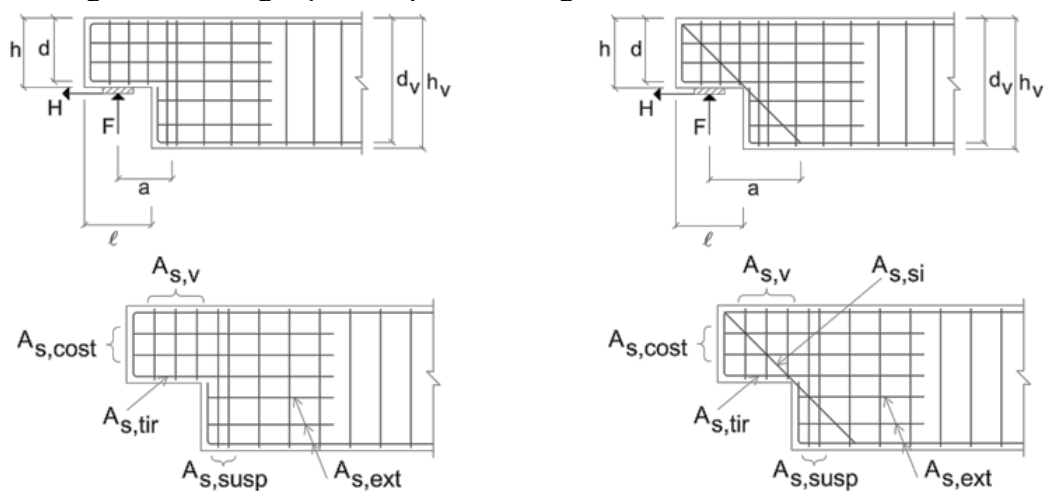


Fonte: Silva (2017)

Essa descontinuidade na extremidade da viga, correspondente à região do dente, resulta em uma grande concentração de tensões de cisalhamento e, portanto, exige uma elevada concentração de armadura. Quando o dimensionamento e o detalhamento das armaduras do dente de concreto não são feitos corretamente, ele se torna um ponto delicado suscetível à ruína.

A capacidade resistente dos dentes de concreto é influenciada por uma variedade de parâmetros, como a geometria do dente, a resistência do concreto, o arranjo das armaduras, a taxa de armadura do tirante ($A_{s,tir}$), o comprimento de ancoragem da armadura do tirante (l_b), a taxa de armadura de suspensão ($A_{s,susp}$), a taxa de armadura transversal ($A_{s,v}$), a taxa de armadura de costura ($A_{s,cost}$), as dimensões do apoio, entre outros fatores. Os parâmetros geométricos e possíveis arranjos das armações de dentes de concreto estão ilustrados na Figura 2.

Figura 2 – Designação dos parâmetros geométricos de dentes de concreto



Fonte: Silva (2017) adaptado de El Debs (2017)

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo geral

O objetivo geral deste trabalho é apresentar contribuições ao projeto e ao dimensionamento de dentes de concreto armado com base em investigações numéricas sobre o efeito do detalhamento das armaduras de suspensão e da quantidade da armadura de costura no comportamento estrutural.

1.2.2 Objetivos específicos

- Compilar e sistematizar as principais recomendações de projeto e dimensionamento de dentes de concreto armado disponíveis na literatura técnica e nas normas vigentes;
- Avaliar, por meio de modelagens numéricas, a influência da distribuição da armadura de suspensão no comportamento estrutural dos dentes de concreto armado;
- Investigar os efeitos das armaduras de costura na capacidade resistente dos dentes;
- Avaliar a proposta de verificação das tensões de compressão no concreto de dentes curtos apresentada por Silva (2017), à luz dos resultados obtidos nas análises numéricas;
- Apontar possíveis aprimoramentos às diretrizes da ABNT NBR 9062:2017 com base nas evidências numéricas encontradas, com vistas a otimizar o desempenho estrutural e a segurança dos elementos.

1.3 Justificativa

Embora os dentes de concreto sejam amplamente utilizados em estruturas pré-moldadas, ainda existem lacunas na literatura técnica e nas normas vigentes quanto ao seu comportamento estrutural e ao dimensionamento adequado. A compreensão mais aprofundada desses elementos é essencial para garantir segurança, eficiência e economia nas soluções adotadas.

Um dos aspectos que merece destaque diz respeito à distribuição da armadura de suspensão. A ABNT NBR 9062:2017 recomenda que essa armadura seja disposta na extremidade da viga, em uma faixa correspondente a $0,25d_{viga}$, mas não especifica como essa armadura deve ser distribuída dentro dessa faixa. A depender do espaçamento entre as barras, podem ocorrer diferentes níveis de concentração de tensões na região do canto reentrante do dente, influenciando diretamente a fissuração e a capacidade resistente. Além disso, a fundamentação teórica ou experimental por trás desta recomendação normativa não está clara na literatura ou não foi investigada de forma sistemática. Dessa forma, torna-se essencial avaliar

o efeito do espalhamento da armadura de suspensão no comportamento estrutural desses elementos.

Outro fator relevante é a presença das armaduras secundárias horizontais, comumente conhecidas como armaduras de costura. Embora seja reconhecido que essas armaduras contribuem para o controle de fissuração e para o aumento da ductilidade da biela comprimida, sua influência quantitativa na capacidade de carga do dente ainda não é suficientemente conhecida. Dessa forma, justifica-se a investigação da influência da armadura de costura sobre o comportamento estrutural de dentes de concreto armado submetidos a diferentes níveis de cisalhamento, com ênfase na sua contribuição para o aumento da capacidade resistente e para o controle da fissuração. Em geral, os modelos de cálculo tradicionais desconsideram esse efeito, o que reforça a necessidade de estudos que aprofundem o entendimento sobre seu papel no mecanismo resistente da biela comprimida.

Além disso, a verificação da tensão de compressão no concreto, exigida pela ABNT NBR 9062:2017, baseia-se em um modelo de bielas e tirantes simplificado e com premissas limitadas, particularmente no que diz respeito à definição da geometria da biela de compressão. A norma não fornece um procedimento claro para o cálculo das dimensões e da inclinação dessa biela, o que leva a interpretações subjetivas e variações significativas nos resultados. Nesse contexto, a proposta de Silva (2017) surge como uma alternativa promissora, por oferecer uma verificação da tensão de compressão mais detalhada, baseada em estudos experimentais e referências consagradas. Validar essa proposta por meio de modelagens numéricas contribui para o aprimoramento das recomendações normativas, como a ABNT NBR 9062:2017 e a ABNT NBR 6118:2023.

Diante disso, esta pesquisa justifica-se pela necessidade de investigar, por meio de modelagens numéricas calibradas com resultados experimentais, o impacto do detalhamento das armaduras, sob diferentes condições, no desempenho estrutural dos dentes de concreto armado. Espera-se, ainda, que os resultados obtidos contribuam para o aprimoramento dos critérios de projeto, promovendo soluções mais seguras, eficientes e tecnicamente embasadas.

1.4 Metodologia

A primeira etapa deste estudo consistiu em uma revisão bibliográfica, com o objetivo de compreender o comportamento dos dentes de concreto armado e identificar os estudos mais

recentes e relevantes relacionados ao tema. Também foi realizada uma análise comparativa dos principais métodos de cálculo empregados no dimensionamento desses elementos.

A etapa seguinte correspondeu ao desenvolvimento do modelo numérico no software de elementos finitos Abaqus, visando à análise do comportamento estrutural dos dentes de concreto. Para isso, foi selecionado um conjunto de dentes experimentais da literatura para fins de calibração do modelo. Nessa fase, foram definidos os seguintes aspectos:

- seleção da malha e do tipo de elemento finito a serem utilizados;
- modelagem das condições de contorno para representar adequadamente o comportamento do sistema;
- escolha do modelo constitutivo dos materiais;
- análise de sensibilidade dos parâmetros do modelo constitutivo.

A validação das simulações numéricas foi feita por meio da comparação com os resultados experimentais. A correspondência da curva força \times deslocamento, os mecanismos de ruptura e o padrão de fissuração foram considerados como critérios de validação.

Com o modelo validado, foi conduzida uma análise paramétrica, com os seguintes objetivos principais:

- investigar a influência do espalhamento da armadura de suspensão no comportamento estrutural dos dentes de concreto;
- avaliar a contribuição das armaduras secundárias horizontais (armaduras de costura) na resistência e no mecanismo de ruptura dos elementos.

Por fim, foi realizada a validação da proposta de verificação das tensões de compressão apresentada por Silva (2017), com o intuito de avaliar sua aplicabilidade prática e identificar possíveis contribuições para o aprimoramento das diretrizes presentes nas normas técnicas brasileiras.

1.5 Estrutura do texto

Este trabalho está organizado em seis capítulos, além desta introdução.

No Capítulo 2, apresenta-se a fundamentação teórica necessária para o desenvolvimento da pesquisa, abordando o comportamento estrutural dos dentes de concreto armado, os principais modelos teóricos utilizados na sua análise, além de um levantamento das pesquisas recentes sobre o tema e dos procedimentos normativos utilizados no projeto desses elementos, tanto em normas nacionais quanto internacionais.

O Capítulo 3 trata da análise numérica realizada com a utilização do software de elementos finitos Abaqus. São descritos os modelos experimentais utilizados para a calibração, os procedimentos de modelagem numérica, as condições de contorno, as propriedades dos materiais, bem como a comparação entre os resultados obtidos numericamente e os dados experimentais da literatura.

No Capítulo 4, são avaliados os modelos teóricos de previsão da capacidade resistente dos dentes de concreto. São analisadas as prescrições da ABNT NBR 9062:2017 e da ABNT NBR 6118:2023, da ACI 318:2019, da EN 1992-1-1:2010 e do modelo proposto por El Debs (2017). Por fim, realiza-se uma análise comparativa entre os resultados obtidos experimentalmente, numericamente e por meio dos modelos analíticos.

O Capítulo 5 apresenta as análises paramétricas desenvolvidas com base no modelo numérico previamente validado. Avalia-se a influência da distribuição da armadura de suspensão e das armaduras de costura na resistência dos dentes de concreto armado, além da verificação das tensões de compressão no concreto. Também se realiza a aplicação da proposta de verificação apresentada por Silva (2017).

Por fim, o Capítulo 6 apresenta as principais conclusões do estudo, destacando as contribuições da pesquisa, bem como sugestões para trabalhos futuros.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Comportamento estrutural dos dentes de concreto

A ABNT NBR 9062:2017 define dentes de concreto como elementos de apoio na extremidade de vigas, placas ou painéis, cuja altura é menor que a altura do elemento a ser apoiado. Por sua vez, a ABNT NBR 6118:2023 define como uma saliência que se projeta na parte superior da extremidade de uma viga a fim de apoiá-la em um consolo ou na extremidade de outra viga.

Como já mencionado, os dentes de concreto apresentam uma grande concentração de tensões de cisalhamento por causa da brusca redução da seção transversal da viga na região de apoio. Eles possuem comportamento estrutural semelhante ao dos consolos e, por isso, as possibilidades de ruína deles são praticamente iguais, acrescidas das possibilidades junto à viga (El Debs, 2017).

Portanto, com base nos mecanismos de falha dos consolos descritos por Powell e Foster (1994), pode-se inferir que, nos dentes de concreto, as falhas decorrem de:

1) Falha por deformação excessiva do tirante: é caracterizada por amplas aberturas de fissuras de flexão que se propagam verticalmente próximo à interface dente-viga e ocorrem após extenso escoamento da armadura do tirante, acompanhadas de um esmagamento local do concreto na parte superior do dente (Figura 3a);

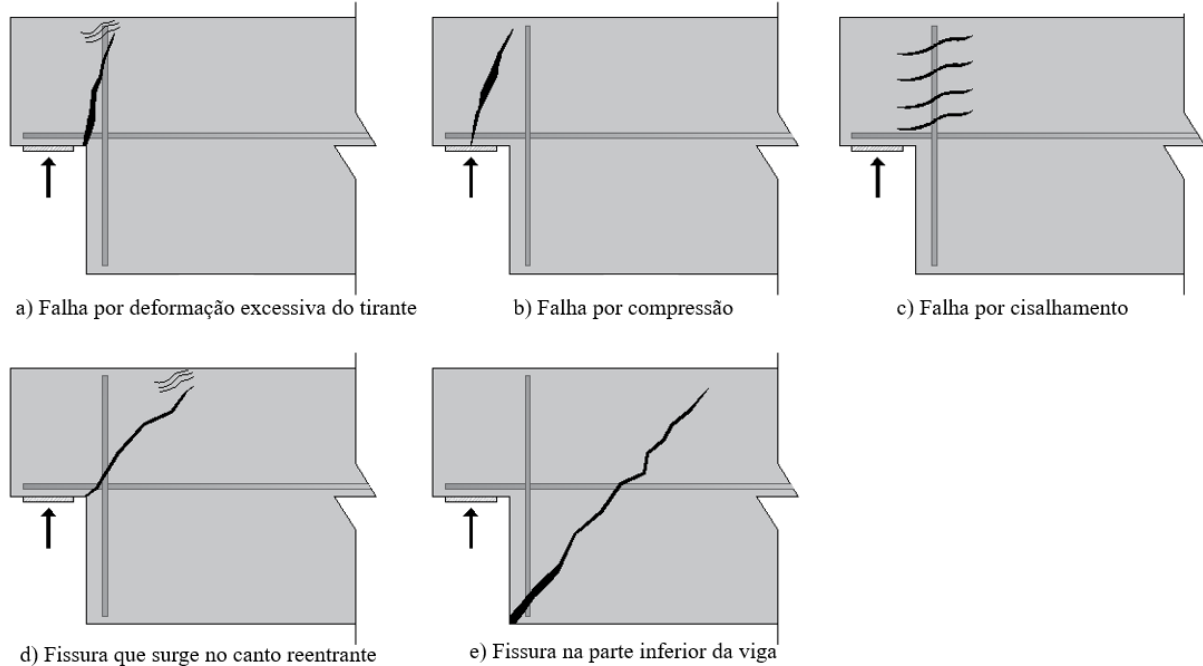
2) Falha por compressão: A falha por compressão pode manifestar-se com o desenvolvimento de várias fissuras diagonais ou apenas uma fissura principal (Figura 3b). No primeiro cenário, ocorre a abertura das fissuras diagonais, que se iniciam entre a placa de apoio e o canto superior interno do dente, seguida por um esmagamento do concreto nessa região. A falha ocorre de forma abrupta, com as fissuras de flexão não apresentando grandes desenvolvimentos. No segundo caso, uma fissura principal se estende desde a placa de apoio até o canto superior interno do dente, resultando em uma falha mais frágil do que a do primeiro caso. Neste caso, o uso de armadura de costura pode evitar essa fissura principal, transformando-a em uma falha um pouco mais dúctil (ou menos frágil);

3) Falha por cisalhamento: ocorre com o desenvolvimento de uma série de fissuras inclinadas ao longo da interface dente-viga (Figura 3c). A ligação destas múltiplas fissuras inclinadas forma um plano frágil, seguido do deslizamento relativo entre o dente e a viga.

Segundo El Debs (2017), as outras duas possibilidades de ruína exclusivas dos dentes de concreto a serem consideradas, decorrentes das falhas adjacentes à viga, são:

- 4) Fissura que surge no canto reentrante do dente, levando ao escoamento da armadura de suspensão (Figura 3d);
- 5) Fissura diagonal que se origina na parte inferior da viga, devido à falta ou insuficiência de ancoragem das barras das armaduras no canto inferior (Figura 3e).

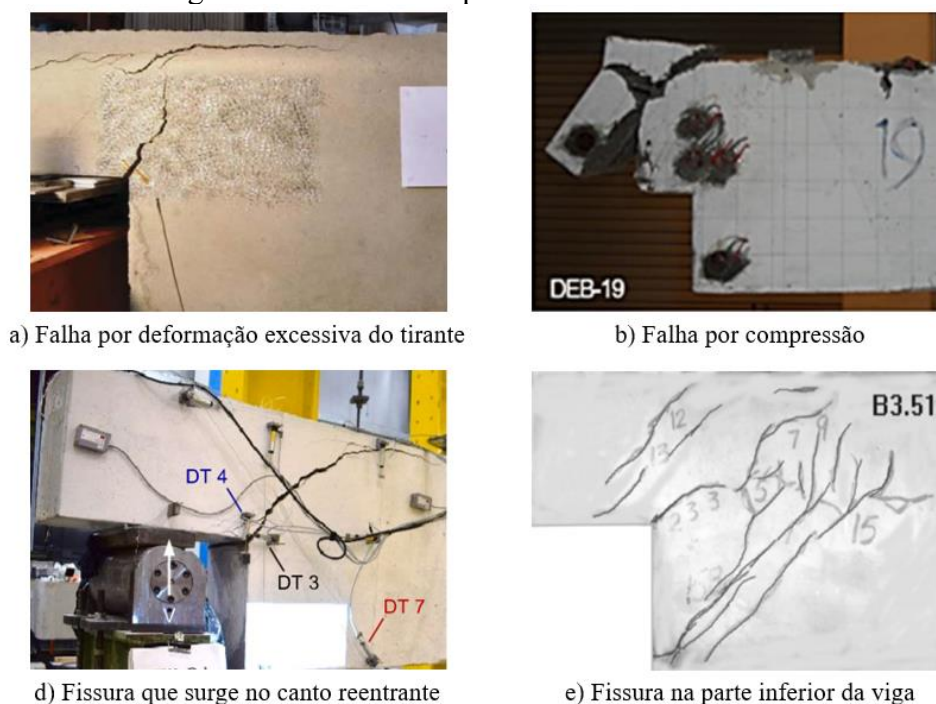
Figura 3 – Potenciais modos de falha do dente de concreto



Fonte: Adaptado de El Debs (2017) e PCI (2010)

Na Figura 4, são apresentados exemplos de falhas em dentes de concreto de vigas que foram submetidas a ensaios de flexão. Os mecanismos de ruptura desses dentes foram correlacionados com os da Figura 3. No entanto, não foram encontradas na literatura fotografias de experimentos com dentes de concreto que apresentassem um padrão de fissuração claramente associável à falha por cisalhamento do tipo corte direto (Figura 3c).

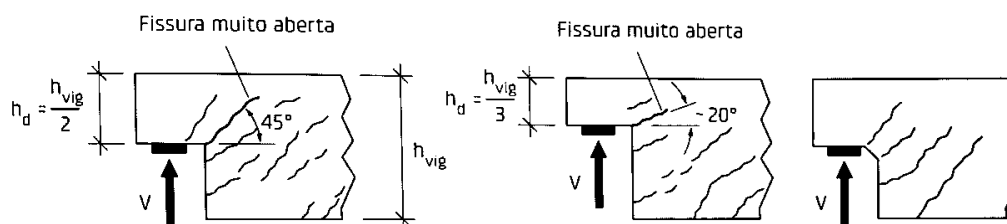
Figura 4 – Modos de ruptura de dentes de concreto



Fonte: a) Falcón (2015); b) Mohammed, Aswin e Liew (2020); d) Rajapakse, Degée e Mihaylov (2022); e) Wang, Guo e Hoogenboom (2005)

Após analisarem o modo de ruptura de 111 vigas com dentes de concreto, Aswin et al. (2015) concluíram que a falha devido às fissuras que se desenvolvem no canto reentrante é o modo predominante de falha das vigas com dentes de concreto armado. Este padrão foi observado pelos pesquisadores independentemente do nível de reforço utilizado.

De acordo com Leonhardt e Mönnig (1978), a inclinação das fissuras depende da relação entre a altura do dente (h) e a altura da viga (h_v). Quanto menor a razão h/h_v , menor o ângulo entre as fissuras e a horizontal. Além disso, tem-se que a presença do chanfro no canto reentrante retarda a fissuração e evita a formação da fissura principal que sai do canto, conforme ilustrado na Figura 5.

Figura 5 – Influência da relação h/h_v no comportamento do dente de concreto

Fonte: El Debs (2017), adaptado de Leonhardt e Mönnig (1978)

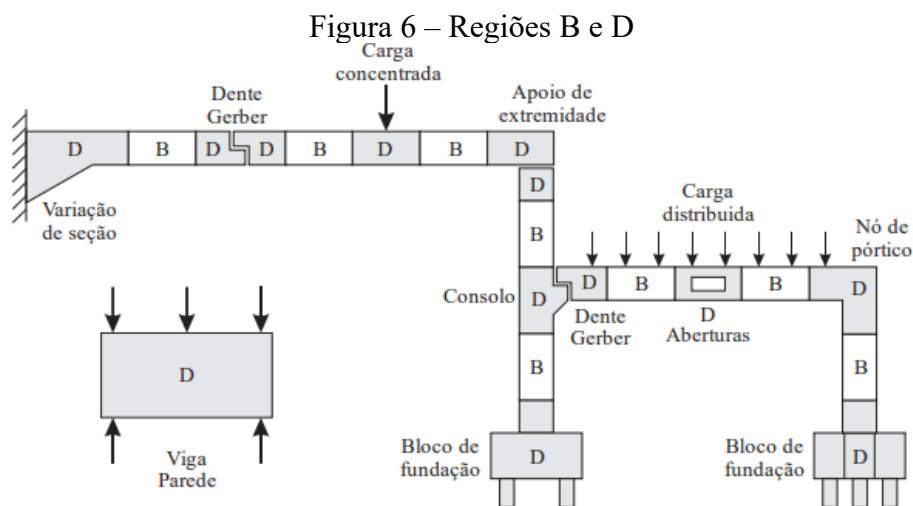
De acordo com a ABNT NBR 9062:2017, os critérios de dimensionamento para dentes de concreto assemelham-se aos de consolos. A norma indica que dentes curtos ($0,5 < a/d \leq 1,0$, sendo a a distância entre o ponto de aplicação da força e o centro de gravidade da armadura de suspensão e d a altura útil do dente) devem ser dimensionados segundo o modelo de bielas e tirantes, enquanto dentes muito curtos ($a/d \leq 0,5$) devem seguir o modelo de atrito-cisalhamento. Por sua vez, tanto a norma americana ACI 318:2019 quanto a europeia EN 1992-1-1:2010 recomendam o uso do modelo de bielas e tirantes para o dimensionamento de dentes de concreto.

Assim, fica evidente a relevância que o modelo de bielas e tirantes e o modelo atrito-cisalhamento possuem no dimensionamento dos dentes de concreto. Portanto, nos próximos tópicos, será realizada uma breve revisão bibliográfica sobre esses modelos.

2.2 Modelo de bielas e tirantes

Os primeiros estudos relacionados ao modelo de bielas e tirantes, conhecido como analogia de treliça, surgiram no início do século XX. Ritter e Morsch propuseram, com base em resultados experimentais, a analogia de modelos de treliças para o dimensionamento por cisalhamento de vigas fletidas em concreto armado (Schlaich, Schafer e Jennewein, 1987).

O modelo é empregado no dimensionamento de elementos de concreto armado das regiões de descontinuidade (Regiões D), onde as hipóteses de Euler-Bernoulli não são válidas. As regiões B, por outro lado, são caracterizadas como áreas onde a teoria de vigas de Euler-Bernoulli é válida (Schlaich, Schafer e Jennewein, 1987). A Figura 6 apresenta uma representação das regiões B e D de uma estrutura.

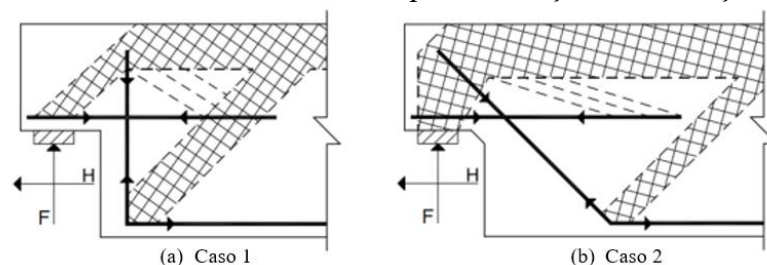


Fonte: Reginato (2020)

O modelo de bielas e tirantes é uma representação ampla baseada no mecanismo de resistência de vigas de concreto armado. Ele divide as vigas em campos de compressão (diagonais e banzo comprimidos) e campos de tração (armadura transversal e banzo tracionado), com a ideia de analisar a viga como uma treliça, onde bielas e tirantes estão conectados em nós (Schlaich, Schafer e Jennewein, 1987).

Leonhardt e Mönnig (1978) propuseram dois modelos para a avaliação dos esforços solicitantes nos dentes. No primeiro caso (Figura 7a), a força cortante é contida por meio de armaduras de suspensão vertical. A armadura do banzo inferior é ancorada à esquerda do início da placa de apoio e se estende para a direita, proporcionando apoio para as bielas de compressão que se originam em sua ancoragem, até uma seção onde elas possam se apoiar nos nós superiores da treliça. No segundo caso (Figura 7b), a força cortante é contida por barras ou estribos inclinados, que têm um ângulo igual ou inferior a 45 graus. Embora teoricamente não haja esforços de tração na parte inferior do dente, é necessário adicionar armadura no banzo inferior para prevenir o cisalhamento ao longo das barras inclinadas e absorver as forças horizontais.

Figura 7 – Modelos de bielas e tirantes para avaliação dos esforços internos



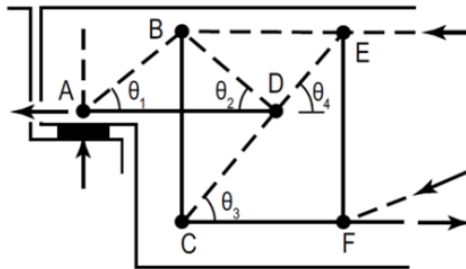
Fonte: Leonhardt e Mönnig (1978)

A partir de ensaios realizados em Stuttgart, Leonhardt e Mönnig (1978) comentaram que no primeiro modelo (Figura 7a), as barras de suspensão não suportaram toda a força cortante, porque parte dela foi conduzida diretamente ao apoio pela inclinação da força do banzo comprimido, sendo essa parcela proporcional à razão h/h_v . Além disso, os autores pontuaram que o modelo que apresentou maior capacidade de resistência foi o originado pela combinação dos dois inicialmente propostos.

Cook e Mitchell (1988) propuseram um modelo de bielas e tirantes para dentes de concreto (Figura 8) a partir da observação dos campos de tensão obtidos em resultados experimentais. Os autores validaram o modelo através de análises computacionais por meio do

método de elementos finitos. O cisalhamento na extremidade da viga é absorvido na parte inferior da seção (nó C) e, em seguida, é levado pelo tirante vertical BC até o topo da viga (nó B). Através da biela AB, o esforço no dente é conduzido para a reação de apoio. O tirante AD é necessário para equilibrar o nó A.

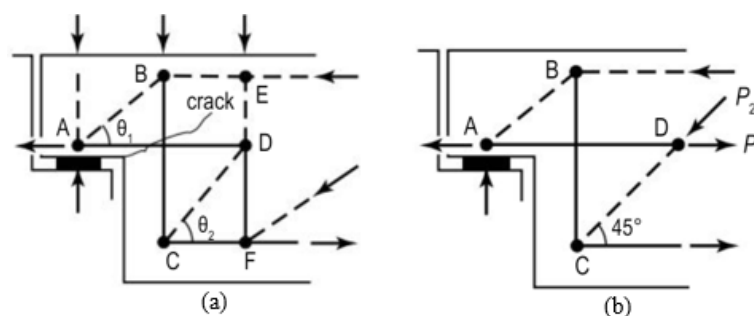
Figura 8 – Modelo de bielas e tirantes proposto por Cook e Mitchell (1988)



Fonte: Cook e Mitchell (1988) adaptado por Sanders (2002)

No estudo realizado por Mattock (2012), foram analisados dois modelos para vigas com dentes. O primeiro modelo, o proposto por Cook e Mitchell (1988), apresentou inconsistências com os resultados obtidos a partir de testes realizados em dezesseis vigas experimentais. Essas inconsistências decorreram da superestimação da força nas armaduras de suspensão, o que resultou em uma necessidade de armadura maior do que realmente era requerida. Quanto ao segundo modelo alternativo, proposto pela *International Federation for Prestressing* (FIP) (1999) (Figura 9a), que considerava uma tensão diagonal de fissuração originada no canto reentrante, o autor observou que a tensão do tirante AD deveria ser resistida no nó D pela componente horizontal da biela CD com o tirante DF, formando uma treliça. Contudo, uma vez que na prática o tirante AD tem comprimento suficiente além do nó para desenvolver resistência ao escoamento, o autor concluiu que o tirante DF não era necessário. Com base nisso, Mattock (2012) sugeriu um novo modelo, ao qual chamou de simplificado, em que o tirante DF foi removido (Figura 9b).

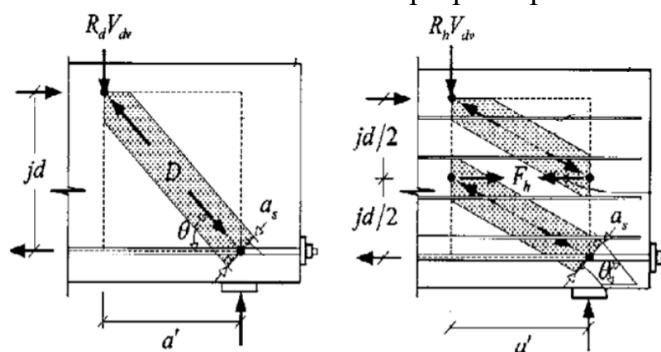
Figura 9 – (a) Modelo de bielas e tirantes proposto pela FIP (1999); (b) Modelo sugerido por Mattock (2012)



Fonte: a) FIP (1999); b) Mattock (2012)

Lu et al. (2003) sugeriram um modelo de bielas e tirantes para prever a capacidade de carga dos dentes de concreto (Figura 10). Eles realizaram testes em doze vigas de concreto de alta resistência com a/d inferior a 1,0, tendo como principais variáveis de estudo a resistência do concreto, a quantidade de armadura principal e a relação a/d . Os resultados indicaram que a resistência ao cisalhamento das vigas com dentes aumenta à medida que a resistência do concreto e a quantidade de armadura principal nos dentes aumentam e diminui com a relação a/d . Ao realizar testes em 24 vigas com dentes de concreto, Lu, Lin e Yu (2012) corroboraram essas conclusões, acrescentando que à medida que a carga horizontal solicitante aumenta, a capacidade resistente dos dentes diminui.

Figura 10 – Modelo de bielas e tirantes proposto por Lu et al. (2003)

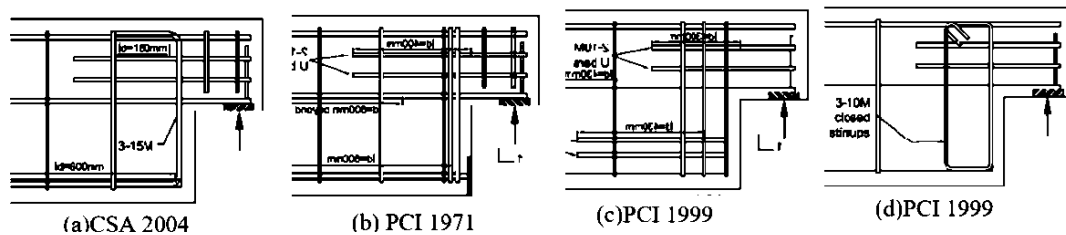


Fonte: Lu et al. (2003)

Peng (2009) investigou duas vigas com dentes de concreto com quatro configurações de armadura diferentes. O modelo de bielas e tirantes adotado pela norma CSA 2004 foi utilizado na análise de um espécime, enquanto os outros foram projetados de acordo com o método do PCI (Figura 11). As variáveis consideradas foram a ancoragem da armadura de suspensão e a quantidade da armadura do tirante. Os resultados revelaram que os modelos de bielas e tirantes utilizados eram uma abordagem conservadora e que as versões antigas dos métodos do PCI de 1971 e 1999 fornecem requisitos de projeto e detalhamento inadequados,

resultando em modos de falha frágeis. O estudo também concluiu que uma ancoragem adequada da armadura de suspensão tem um impacto significativo na ductilidade, no tipo de falha e na capacidade de cisalhamento, aumentando-a em cerca de 44%. Adicionalmente, foi demonstrado que posicionar a armadura de suspensão próxima à extremidade do dente aumentou a capacidade resistente à força cortante nas extremidades da viga.

Figura 11 – Detalhes dos dentes de concreto testados por Peng (2009)

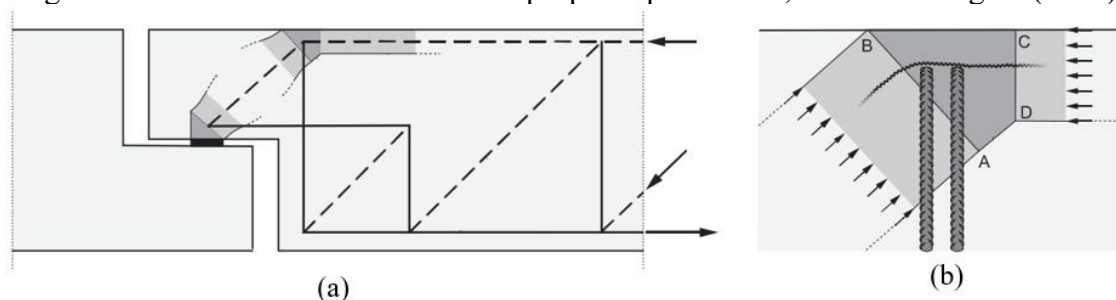


Fonte: Shakir (2018), adaptado de Peng (2009)

Moreno-Martínez e Meli (2014), por sua vez, ensaiaram quatro modelos de vigas com dentes de concreto sob cargas verticais que seguiram as recomendações do *PCI Design Handbook*. Os modelos atenderam aos requisitos normativos sob cargas de serviço e carga última, e apresentaram melhor controle de fissuração. Eles concluíram que as disposições de projeto do PCI identificaram corretamente o mecanismo de falha, mas foram bastante conservadoras na determinação da capacidade de carga. Além disso, os pesquisadores demonstraram que o modelo de bielas e tirantes proposto por Mattock (2012) estimou melhor a capacidade de carga dos elementos.

Falcón, Pallarés e Miguel (2019) também propuseram um procedimento para definição da geometria de modelos de bielas e tirantes (Figura 12a). Os autores realizaram vinte e oito ensaios de vigas com dentes de concreto em quinze diferentes arranjos de armadura, com e sem armadura inclinada. Eles observaram que elementos que possuem grandes quantidades de armadura, especialmente quando a armadura de suspensão está concentrada em uma camada, são mais suscetíveis a falhas por lascamento. Além disso, destacaram que a geometria dos modelos de bielas é significativamente influenciada pelo comportamento da região nodal localizada na parte superior da armadura de tirante (Figura 12b).

Figura 12 – Modelo de bielas e tirantes proposto por Falcón, Pallarés e Miguel (2019)



Fonte: Falcón, Pallarés e Miguel (2019)

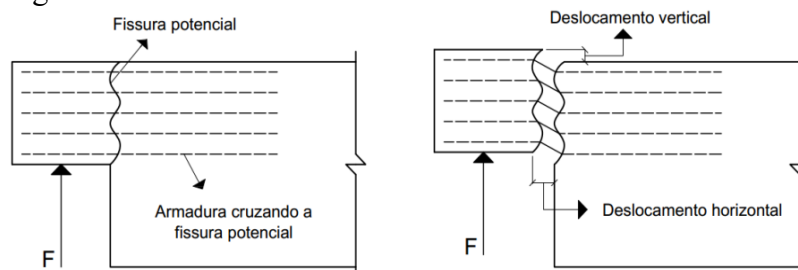
2.3 Modelo atrito-cisalhamento

De acordo com Powell e Foster (1994), os primeiros idealizadores do modelo atrito-cisalhamento foram Birkeland (1966) e Mast (1968). Posteriormente, o método foi ampliado e aperfeiçoado por Hermansen e Cowan (1974) e Mattock (1974).

De acordo com o PCI (2010), o modelo atrito-cisalhamento prevê a resistência da interface concreto-concreto submetida a tensões de cisalhamento longitudinal de maneira semiempírica. A ductilidade é alcançada por uma armadura que atravessa a possível fissura, de modo que a tensão desenvolvida pelo reforço forneça uma força normal à fissura. Esta força normal em combinação com o atrito na interface da fissura fornece a resistência ao cisalhamento.

No contexto do dente de concreto, pressupõe-se que a falha ocorre devido à ação da força cortante induzida por uma fissura que se desenvolve na ligação entre o dente e a viga, que permite um deslocamento relativo entre eles (Figura 13). Contudo, para baixas solicitações, o mecanismo de intertravamento dos agregados também contribui para aumentar a resistência ao escorregamento entre o dente e a viga (Huang e Nanni, 2000).

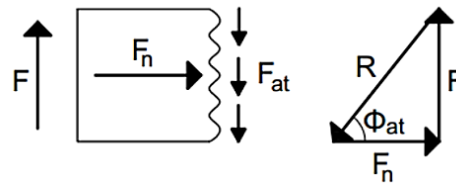
Figura 13 – Modelo atrito-cisalhamento em dentes de concreto



Fonte: Silva (2017), adaptado de Huang e Nanni (2000)

Segundo El Debs (2017), a força normal gerada pela armadura, juntamente com a força de atrito, equilibra o cisalhamento atuante (Figura 14).

Figura 14 – Esquema das forças do modelo atrito-cisalhamento



Fonte: Adaptado de El Debs (2017)

Dessa forma, utilizando a teoria de atrito de Coulomb, é possível calcular a quantidade de armadura necessária para garantir a transferência efetiva do cisalhamento a partir de:

$$F_n = \frac{F}{\text{tg}(\phi_{at})} \quad (1)$$

$$F_n = A_{st} f_{yd} \quad (2)$$

$$\mu = \text{tg}(\phi_{at}) \quad (3)$$

$$A_{st} = \frac{F}{f_{yd} \mu} \quad (4)$$

Onde F é a força vertical atuante; F_n é a força normal desenvolvida pela armadura; Φ_{at} é o ângulo cuja tangente representa o coeficiente de atrito μ ; A_{st} é a área de aço necessária para garantir a transferência da força cortante; e f_{yd} é a resistência de cálculo ao escoamento do aço.

De acordo com o ACI 318:2019, no modelo de atrito-cisalhamento, é necessário utilizar valores elevados de coeficiente de atrito nas equações para que a resistência ao cisalhamento calculada esteja de acordo com resultados experimentais.

Diferentemente do modelo de bielas e tirantes, no modelo de atrito-cisalhamento, a sugestão é que a armadura seja uniformemente distribuída ao longo da fissura principal. Nesse caso, não se levaria em consideração o momento fletor na seção da fissura em potencial devido à excentricidade da força vertical F , o que resultaria em uma concentração maior da armadura na parte tracionada da seção. Quando se trata do dente de concreto, essa distribuição da armadura ficaria mais concentrada na parte inferior do dente, próxima ao canto reentrante (El Debs, 2017).

Como dito anteriormente, as normas de estruturas de concreto ABNT NBR 9062:2017 e ABNT NBR 6118:2023 indicam o uso de modelo de atrito-cisalhamento para dimensionamento de dentes muito curtos ($a/d \leq 0,5$), podendo ser considerado o efeito favorável do engrenamento dos agregados, desde que a interface entre o dente e a viga seja

atravessada por barras perpendiculares à fissura potencial. Por sua vez, o manual *PCI Design Handbook* (PCI, 2010) sugere um método baseado na teoria clássica de cisalhamento e na teoria de atrito-cisalhamento. Contudo, o método é limitado para dentes de concreto com relação a/d até 1,0.

É importante destacar que esse modelo, desenvolvido e amplamente empregado nos Estados Unidos, tem sido utilizado no projeto de ligações entre elementos pré-moldados. No entanto, é alvo de críticas quanto à sua consistência conceitual (El Debs, 2017).

2.4 Pesquisas recentes sobre dentes de concreto

Ao longo dos anos, pesquisadores têm produzido trabalhos importantes relacionados a dentes de concreto. A busca contínua pela melhoria dos modelos que descrevem o comportamento do elemento é o maior motivo.

Com o objetivo de aprimorar os procedimentos de projeto estabelecidos na ABNT NBR 9062:2017, Silva (2017) propôs um modelo para a verificação das tensões de compressão no concreto em dentes de concreto. Este modelo foi desenvolvido com base em estudos realizados por Mattock (2012), Mattock e Chan (1979), Yang, Ashour e Lee (2011), bem como considerações de cálculo da largura da biela inclinada, conforme documentado em exemplos de projetos, publicações e normas, tais como a ACI 318:2014, European Concrete Platform ASBL (2008), Sanders (2002) e Wight e MacGregor (2012).

O modelo proposto por Silva (2017) tem como objetivo avaliar as tensões nas regiões nodais do conjunto dente-viga. De acordo com o autor, as regiões avaliadas incluem: a região de compressão inclinada no apoio do dente, a região de compressão inclinada na extremidade oposta ao apoio no dente e a região de compressão inclinada na extremidade inferior da viga. Essa abordagem visa aperfeiçoar o entendimento das tensões críticas nessas áreas, contribuindo para uma análise mais precisa do comportamento estrutural dos dentes de concreto.

A proposta para verificação da tensão de compressão no concreto de Silva (2017) trata-se do modelo de bielas e tirantes simplificado de Mattock (2012) com os limites de tensões da ABNT NBR 6118:2023. Ela foi avaliada por meio de uma comparação entre resultados analíticos e experimentais, apresentando resultados satisfatórios e a favor da segurança. A sua base de dados foi composta por informações provenientes de diversos estudos experimentais, incluindo os trabalhos de Mattock e Chan (1979), Melo (1991), Souza (1997), Zalochi (1997, 2002), Lu et al. (2003), Leite Jr. e Moreno Jr. (2006), Peng (2009), Lu, Lin e Yu (2012), e Lu, Chen e Lin (2015).

O autor concluiu que os resultados menos conservadores dos estudos comparativos não se devem ao modelo de bielas e tirantes e nem ao cálculo da largura da biela inclinada, mas sim ao valor limite de tensão recomendado pela norma brasileira, que é maior que o valor estabelecido pela ACI 318:2019.

Abdul-Jawad (2018) estabeleceu um modelo numérico para simular o desempenho carga-deslocamento de vigas de concreto armado com dente nas extremidades sob carga vertical. Ele utilizou o software Abaqus para a modelagem e considerou as propriedades de material lineares e não lineares para o concreto e para o aço. O modelo numérico apresentou resultados satisfatórios, representando bem dados de experimentos encontrados na literatura. Os estudos usando este modelo foram realizados para inspecionar os efeitos de a/d , da resistência à compressão do concreto e a quantidade da armadura do tirante no desempenho das vigas com dentes de concreto. Ele observou que a resistência ao cisalhamento dos espécimes aumentava com o aumento da resistência à compressão do concreto e que quanto menor a relação a/d , maior a rigidez e a capacidade resistente das vigas. Além disso, concluiu que a carga última dos espécimes aumenta com o aumento da resistência à compressão do concreto e que a resistência à flexão aumenta com o aumento da armadura do tirante.

Rajapakse, Degée e Mihaylov (2022), por sua vez, realizaram oito testes em vigas pré-moldadas para analisar os modos de falha dos dentes de concreto, variando a quantidade de armadura no dente e a relação entre as áreas de armadura horizontal e vertical. Os pesquisadores observaram que à medida que a quantidade de armadura do tirante foi aumentada, o modo de falha mudou de uma ruptura ao longo de uma fissura de canto reentrante com escoamento e ruptura dos estribos para uma ruptura por cisalhamento com esmagamento do concreto na região do dente. Também observaram que, para uma mesma área total de armadura, ligações com maior relação armadura do tirante/armadura de suspensão são ligeiramente mais resistentes do que ligações com menor relação.

Recentemente, Santos (2022) analisou numericamente dentes de concreto armado quanto aos seus parâmetros de resistência à compressão, à relação a/d e à inclinação da armadura de suspensão. Utilizando elementos finitos 2D por meio da ferramenta computacional *ATENA*, ele analisou e validou ensaios experimentais realizados previamente por Lu, Lin e Yu (2012) e Falcón, Pallarés e Miguel (2019). Além disso, examinou os dentes de concreto à vista da ABNT NBR 9062:2017 e observou que as menores capacidades resistentes foram atingidas pelos espécimes de dentes de concreto curtos dimensionados por atrito-cisalhamento.

Don et al. (2022) também utilizaram o *ATENA* para análises não lineares de elementos finitos de vigas com dentes nas extremidades. Contudo, eles avaliaram a precisão do modelo numérico na previsão da resposta de dentes de concreto com detalhamento de armadura inadequado. Os padrões de fissuração previstos e os modos de falha coincidiram consistentemente com os obtidos experimentalmente, exibindo falhas localizadas no canto reentrante do dente e na profundidade total da seção devido à quantidade inadequada de reforço ao cisalhamento. Outra análise foi a combinação de reduções da seção transversal das barras para replicar a corrosão do aço em zonas críticas. Eles obtiveram que a influência dos mecanismos de deterioração reduziu a capacidade estrutural em mais de 50% em comparação a vigas com dentes recém-construídas sem deterioração.

Abeysingha, Padmasiri e Yapa (2023) estudaram um modelo baseado em cinemática para a previsão da capacidade de carga de vigas com dente na extremidade. Eles impuseram ao algoritmo do modelo a ruptura do aço e a consideração de fissuras por compressão e cisalhamento que se originam na parte inferior da viga. O modelo capturou corretamente o modo de falha por ruptura do aço; e, ao utilizar propositalmente uma armadura de suspensão inadequada, o modelo gerou fissuras que se originavam na parte inferior da viga e não a fissura de canto reentrante. Os resultados foram comparados a cinco resultados experimentais disponíveis e se demonstraram satisfatórios.

Aksoylu, Özkılıç, Arslan (2023) analisaram a resistência ao cisalhamento de dentes experimentalmente e numericamente a partir da análise de a_v/d_v , sendo a_v a distância entre o ponto de aplicação da força na viga e o ponto de apoio, e d_v a altura útil da viga. Através de modelos desenvolvidos no Abaqus e dos experimentos realizados, os pesquisadores analisaram que à medida que a relação a_v/d_v aumentava nas vigas, a capacidade de carga diminuía. Além disso, notaram que os danos por cisalhamento no dente foram substituídos por danos por flexão. Os autores sugeriram que, a fim de garantir uma ruptura por flexão dúctil, as vigas sejam projetadas com relações a_v/d_v e a/d de pelo menos 2,5 e 1,8, respectivamente.

Masénas, Meškėnas e Valivonis (2023) empregaram análises paramétricas analíticas e numéricas para comparar o comportamento de vigas com dentes protendidas e não protendidas. Os resultados mostraram que a protensão tem um impacto significativo na formação de fissuras e na capacidade resistente das vigas com dentes. A intensidade deste efeito depende de vários parâmetros, incluindo armadura de suspensão, resistência do concreto, altura do dente e distância entre o apoio e o canto reentrante. Em níveis elevados de protensão, surgiram fissuras

no canto reentrante antes da viga ser submetida a uma carga externa. Os autores ainda propuseram um modelo de cálculo analítico para avaliar tais reduções.

Mihaylov (2024) propôs um modelo capaz de prever a abertura da fissura do canto reentrante do dente de concreto e capturar a resposta desde a carga zero até o escoamento da armadura de suspensão. Para isso, ele utilizou um banco de dados de 42 testes com uma ampla gama de variáveis para validar o modelo. Ele observou que os parâmetros que mais influenciaram a abertura da fissura do canto foram a quantidade e o detalhamento da armadura do dente. O pesquisador concluiu que o modelo proposto captou bem o efeito destas variáveis e, portanto, pode ser utilizado para dimensionar o controle de fissuras em condições de serviço e tem potencial para avaliar a segurança de estruturas existentes com fissuras abertas.

No mesmo propósito, Falcón et al. (2025) realizaram medição contínua por correlação de imagem digital de 28 experimentos para validar um modelo de bielas e tirantes capaz de avaliar a largura de fissuras de canto em cargas de serviço. Os resultados do modelo concordaram satisfatoriamente com as observações experimentais deste estudo.

Menichini et al. (2024) investigaram o comportamento estrutural de vigas com dentes de concreto por métodos analíticos e por modelagem por elementos finitos, desenvolvida no software DIANA. Os resultados foram satisfatórios na previsão dos modos de falha, padrões de fissuração, distribuições de tensões e curvas de carga-deformação, quando comparados com experimentos da literatura.

Posteriormente, Menichini et al. (2025) realizaram uma campanha experimental em dentes de concreto armado, com vários arranjos de armadura, para comparar o padrão de fissuras no Estado Limite de Serviço (ELS) e na resposta pós-pico. Eles concluíram que arranjos com armaduras de suspensão inclinadas reduzem as larguras de fissuras no ELS em comparação com outras configurações e aumentam a ductilidade.

Diante da relevância de tantos estudos, torna-se evidente a importância de investigar o comportamento dos dentes de concreto. Os parâmetros mais frequentemente avaliados na literatura incluem a resistência à compressão, a relação a/d , a inclinação da armadura de suspensão e a quantidade de armaduras principais no dente. Contudo, observa-se uma lacuna significativa na análise do comportamento desses elementos especialmente no que se refere ao espalhamento da armadura de suspensão e na quantidade da armadura de costura.

2.5 Procedimentos de projeto para dentes de concreto

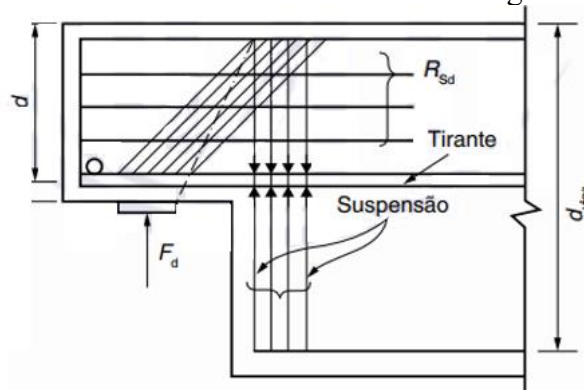
Neste item, são apresentados alguns dos procedimentos de projeto para dentes de concreto disponíveis em normas e livros técnicos. O livro técnico selecionado foi o de El Debs (2017), reconhecido por sua ampla utilização entre estudantes e engenheiros. Além disso, são apresentados os procedimentos de projeto das normas brasileiras ABNT NBR 6118:2023 e ABNT NBR 9062:2017, bem como as normas norte-americana ACI 318:2019 e europeia EN 1992-1-1:2010.

2.5.1 ABNT NBR 6118:2023 e ABNT NBR 9062:2017

A ABNT NBR 6118:2023 afirma que os dentes Gerber têm um comportamento similar ao de consolos e, portanto, podem ser descritos por modelo biela-tirante (Figura 15) desde que as diferenças mais importantes sejam consideradas. São elas:

- 1) A biela do dente é usualmente mais inclinada, por que tende a se apoiar na armadura de suspensão, dentro da viga, na extremidade oposta ao ponto de aplicação da carga;
- 2) A armadura principal do dente deve penetrar na viga, de forma que ancore nas bielas devido ao cisalhamento na viga;
- 3) A armadura de suspensão do dente deve ser calculada para uma força maior ou igual à força solicitante vertical de cálculo (F_d), de acordo com o modelo biela-tirante adotado.

Figura 15 – Modelo de bielas e tirantes de dente de concreto segundo ABNT NBR 6118:2023



Fonte: ABNT NBR 6118:2023

De acordo com a ABNT NBR 9062:2017, os critérios de dimensionamento do dente de concreto se assemelham aos de consolo. Assim, sendo a a distância entre o ponto de aplicação da força e o centro de gravidade da armadura de suspensão e d a altura útil do dente, as seguintes hipóteses valem para os dentes:

- a) Para $1,0 < a/d \leq 2,0$: o dimensionamento é feito como viga em balanço;
- b) Para $0,5 < a/d \leq 1,0$ (dentes curtos): o dimensionamento deve seguir o modelo de bielas e tirantes;
- c) Para $a/d \leq 0,5$ (dentes muito curtos): o dimensionamento é feito supondo a ruptura ao longo do plano de ligação, caracterizado pelo modelo de atrito-cisalhamento;
- d) Despreza-se o possível efeito favorável de cargas horizontais que comprimam o plano de ligação dente-viga;
- e) Considera-se que o efeito das cargas horizontais que tracionem o plano de ligação entre o dente e o elemento de sustentação seja totalmente resistido pelo tirante.

Para dentes muito curtos, com $a/d \leq 0,5$, sujeitos à compressão diagonal, a norma recomenda adotar tensão resistente de cisalhamento igual a:

$$\tau_{wu} = 3,0 + 0,9 \cdot \rho \cdot f_{yd} \leq 0,27 \cdot \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) \cdot f_{cd} \leq 8 \text{ MPa} \quad (5)$$

$$\rho = \frac{A_{s,tir}}{b \cdot d} \quad (6)$$

Onde ρ é a taxa geométrica de armadura no tirante; f_{yd} é a resistência de cálculo ao escoamento do aço, sendo $f_{yd} \leq 435$ MPa; f_{ck} é a resistência característica do concreto à compressão; f_{cd} é a resistência de cálculo à compressão do concreto; $A_{s,tir}$ é a área de aço da armadura do tirante; b é a largura do dente do concreto; e d é a altura útil.

Para o engastamento do dente, a ABNT NBR 9062:2017 indica que, para dentes com $a/d \leq 2,0$, a taxa mecânica de cálculo da armadura do tirante ω deve ser superior a 0,04 e é dada por:

$$\omega = \rho \cdot f_{yk}/f_{ck} \quad (7)$$

Para os dentes curtos ($0,5 < a/d \leq 1,0$) cujas bielas possuem inclinação de até 45°, a ABNT NBR 9062:2017 aponta para a verificação da compressão diagonal do concreto disposta na ABNT NBR 6118:2023. Para a análise, calcula-se os seguintes parâmetros:

$$f_{cd1} = 0,85 \cdot (1 - f_{ck}/250) \cdot f_{cd} \quad (8)$$

$$f_{cd2} = 0,60 \cdot (1 - f_{ck}/250) \cdot f_{cd} \quad (9)$$

$$f_{cd3} = 0,72 \cdot (1 - f_{ck}/250) \cdot f_{cd} \quad (10)$$

Onde f_{cd1} corresponde à resistência do concreto em regiões com tensões de compressão transversal ou sem tensões de tração transversal e em nós que confluem somente bielas de compressão; f_{cd2} corresponde à resistência do concreto em regiões com tensões de tração transversal e em nós que confluem dois ou mais tirantes tracionados; e f_{cd3} corresponde à resistência do concreto em nós onde conflui um tirante tracionado. Para inclinações de biela maiores que 45°, a ABNT NBR 9062:2017 indica que o valor-limite da tensão de compressão deve corresponder a $0,85 f_{cd}$.

Além disso, a norma apresenta os critérios de dimensionamento das armaduras do dente de concreto. A área de aço total da armadura do tirante deve ser calculada a partir de:

$$A_{s,tir} = A_{sv} + H_d/f_{yd} \quad (11)$$

Onde H_d é a força horizontal de cálculo e A_{sv} é a armadura necessária para resistir à força vertical.

Para dentes muito curtos ($a/d \leq 0,5$):

$$A_{sv} = 0,8 \cdot F_d/(f_{yd} \cdot \mu) \quad (12)$$

Para dentes curtos ($0,5 < a/d \leq 1,0$), tem-se que:

$$A_{sv} = (0,1 + a/d) \cdot F_d/f_{yd} \quad (13)$$

Sendo F_d a força vertical de cálculo e μ o coeficiente de atrito. De acordo com a ABNT NBR 9062:2017, o coeficiente assume o valor de 1,4 para concreto lançado monoliticamente, de 1,0 para concreto lançado sobre concreto endurecido com interface com rugosidade mínima de 5 mm de profundidade a cada 30 mm, ou de 0,6 para concreto lançado sobre concreto endurecido com interface lisa.

O comprimento básico de ancoragem da armadura do tirante l_b , de acordo com a ABNT NBR 6118:2023, deve ser:

$$l_b = \frac{\phi}{4} \cdot \frac{f_{yd}}{f_{bd}} \quad (14)$$

Onde f_{bd} é a resistência de aderência de cálculo entre a armadura e o concreto na ancoragem, de acordo com o item 9.3.2.1 da ABNT NBR 6118:2023.

Além da armadura do tirante, a ABNT NBR 9062:2017 aponta a importância da armadura de suspensão. Ela é capaz de resistir à totalidade das cargas verticais aplicadas F_d com tensão f_{yd} , que deve ser inferior a 435 MPa. De acordo com a norma, a armadura deve ser concentrada na extremidade da viga na forma de estribos fechados que envolvam a armadura longitudinal da viga, distribuída em uma distância menor ou igual $d_{viga}/4$ da extremidade da viga. A área de aço da armadura de suspensão pode ser calculada por:

$$A_{s,sus} = F_d / f_{yd} \quad (15)$$

A ABNT NBR 9062:2017 indica quanto à armadura de costura que:

- a) Para dentes muito curtos ($a/d \leq 0,5$), a armadura de costura deve ser distribuída em $2/3$ de d , adjacentes ao tirante, com o valor de:

$$(A_s/s)_{cost} \geq 0,5 \cdot (A_{sv}/d) \quad (16)$$

O outro terço de d deve ser completado com a armadura de costura mínima, correspondente a:

$$A_{s\ cost,min} = 0,15 \cdot b \text{ cm}^2/\text{m} \quad (17)$$

- b) Para dentes curtos ($0,5 < a/d \leq 1,0$), a armadura de costura deve ser distribuída em $2/3$ de d , adjacentes ao tirante, com o valor de:

$$(A_s/s)_{cost} \geq 0,4 \cdot (A_{sv}/d) \quad (18)$$

Por fim, a ABNT NBR 9062:2017 exige o emprego de estribos verticais. Para dentes com relação $a/d \leq 1,0$, os estribos verticais devem atender a uma taxa mínima de $0,15\%b \cdot h_d$,

conforme preconizado pela ABNT NBR 9062:2017. Quando a força permanente é preponderante às demais, γ_n equivale a 1,0 para elementos pré-fabricados e 1,1 para os demais casos; caso contrário, γ_n equivale a 1,1 para elementos pré-fabricados e 1,2 para os demais.

Com isso, é possível determinar a força vertical de cálculo F_d e a força horizontal de cálculo H_d através de:

$$F_d = \gamma_n \cdot (\gamma_g \cdot F_g + \gamma_q \cdot F_q) \quad (19)$$

$$H_d \geq 0,2 \cdot F_d \quad (20)$$

Onde γ_g é o coeficiente de majoração da ação permanente e γ_q é o coeficiente de majoração da ação variável, ambos iguais a 1,4; F_g é a força vertical proveniente da ação permanente; e, por fim, F_q é a força vertical proveniente da ação variável.

A verificação do concreto consiste na constatação que a tensão atuante de cálculo é menor que a resistente, conforme:

$$\tau_{wd} = \frac{F_d}{b \cdot d} \leq \tau_{wu} \quad (21)$$

Para dentes muito curtos ($a/d \leq 0,5$), a tensão resistente de cálculo τ_{wu} é dada por:

$$\tau_{wu} = 3,0 + 0,9 \cdot \rho \cdot f_{yd} \leq 0,27 \cdot \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) \cdot f_{cd} \leq 8 \text{ MPa} \quad (22)$$

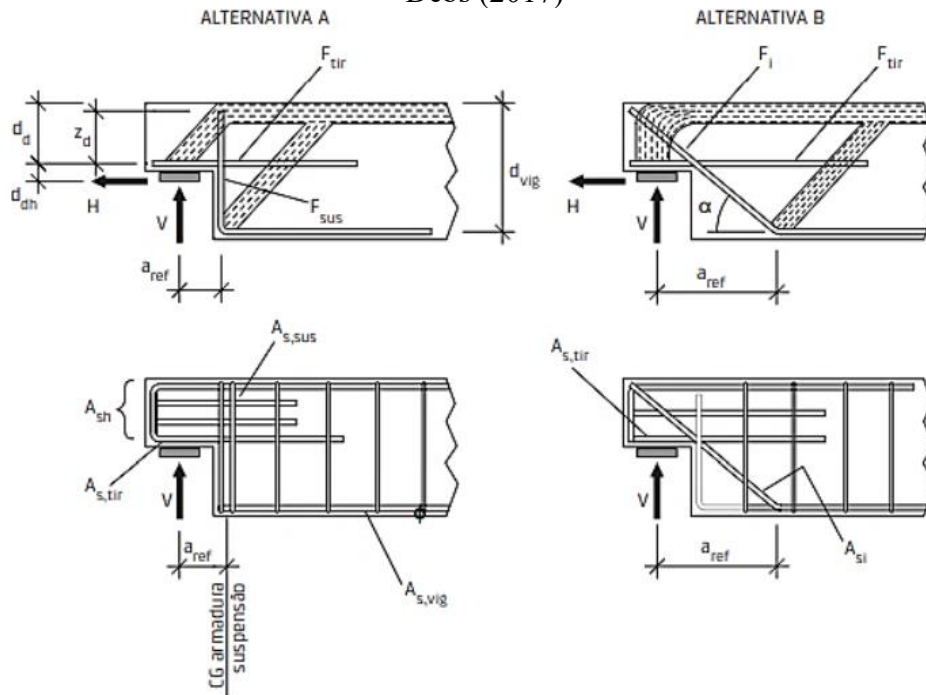
Para dentes curtos ($0,5 < a/d \leq 1,0$), a tensão resistente de cálculo τ_{wu} é:

$$\tau_{wu} = \frac{0,18 \cdot f_{cd}}{\sqrt{0,9^2 + (a/d)^2}} \quad (23)$$

Segundo El Debs (2017), ao considerar a redução da tensão de compressão na biela para $0,85f_{cd}$, conforme recomendado pela NBR 9062:2017, e adotando-se o limite de tensão de cisalhamento de referência de $0,20f_{cd}$ proposto pelo ACI 318:2019, obtém-se, por analogia, um valor de referência para os dentes de concreto da ordem de $0,17f_{cd}$.

O autor prescreve dois modelos de disposição da armadura e de transmissão das forças, conforme esquematizado na Figura 17.

Figura 17 – Modelos de transmissão de forças e da disposição das armaduras segundo El Debs (2017)



Fonte: El Debs (2017)

No modelo A, quanto à área da armadura do tirante, tem-se que:

- a) Para dentes muito curtos ($a/d \leq 0,5$), com base no modelo atrito-cisalhamento:

$$A_{s,tir} = \frac{1}{f_{yd}} \cdot \left(\frac{0,8 \cdot F_d}{\mu} + H_d \right) \quad (24)$$

- b) Para dentes curtos ($0,5 < a/d \leq 1,0$):

$$A_{s,tir} = \frac{1}{f_{yd}} \cdot \left(\frac{F_d \cdot a}{0,85 d} + 1,2 \cdot H_d \right) \quad (25)$$

A área da armadura de suspensão do modelo A é calculada por:

$$A_{s,sus} = F_d / f_{yd} \quad (26)$$

Por sua vez, no modelo B, ao considerar $z_d = 0,85d$ e $d_h = 0,2d$, ilustrados na Figura 17b, de acordo com Leonhardt e Mönning (1978), a área de aço da armadura do tirante pode ser obtida por:

$$A_{s,tir} = \frac{1}{f_{yd}} \left(0,3 \cdot \frac{d_{vig}}{d} \cdot \frac{a}{d} \cdot F_d + 1,2 \cdot H_d \right) \quad (27)$$

A área de aço das armaduras de suspensão, que são dispostas com uma inclinação α entre a horizontal e o eixo da barra no modelo B, são dadas por:

$$A_{s,sus,i} = \frac{F_d}{\text{sen}\alpha \cdot f_{yd}} \quad (28)$$

Segundo El Debs (2017), a combinação dos dois arranjos analisados possibilita uma situação intermediária que, de acordo com a análise experimental apresentada por Leonhardt e Mönning (1978), resulta em uma maior capacidade resistente.

Além da armadura principal, El Debs (2017) destaca a importância de prever uma armadura horizontal que reduza a abertura de fissuras que saem do canto reentrante, chamada de armadura de costura. Baseado no manual do PCI (2010), o autor recomenda para a armadura de costura o valor de, pelo menos, metade da área de aço do tirante. Contudo, de acordo com El Debs (2017), para a armadura de costura é possível descontar a parcela referente à força horizontal H_d do cálculo da armadura do tirante. Portanto, tem-se que:

$$\begin{aligned} A_{s,cost} &\geq 0,50 \cdot A_{s,tir,vertical} \\ A_{s,cost} &\geq 0,50 \cdot \frac{1}{f_{yd}} \left(0,3 \cdot \frac{d_{vig}}{d} \cdot \frac{a}{d} \cdot F_d \right) \end{aligned} \quad (29)$$

A armadura vertical, por sua vez, pode ser obtida por:

$$A_{sv} = 0,25 \cdot A_{s,tir} \quad (30)$$

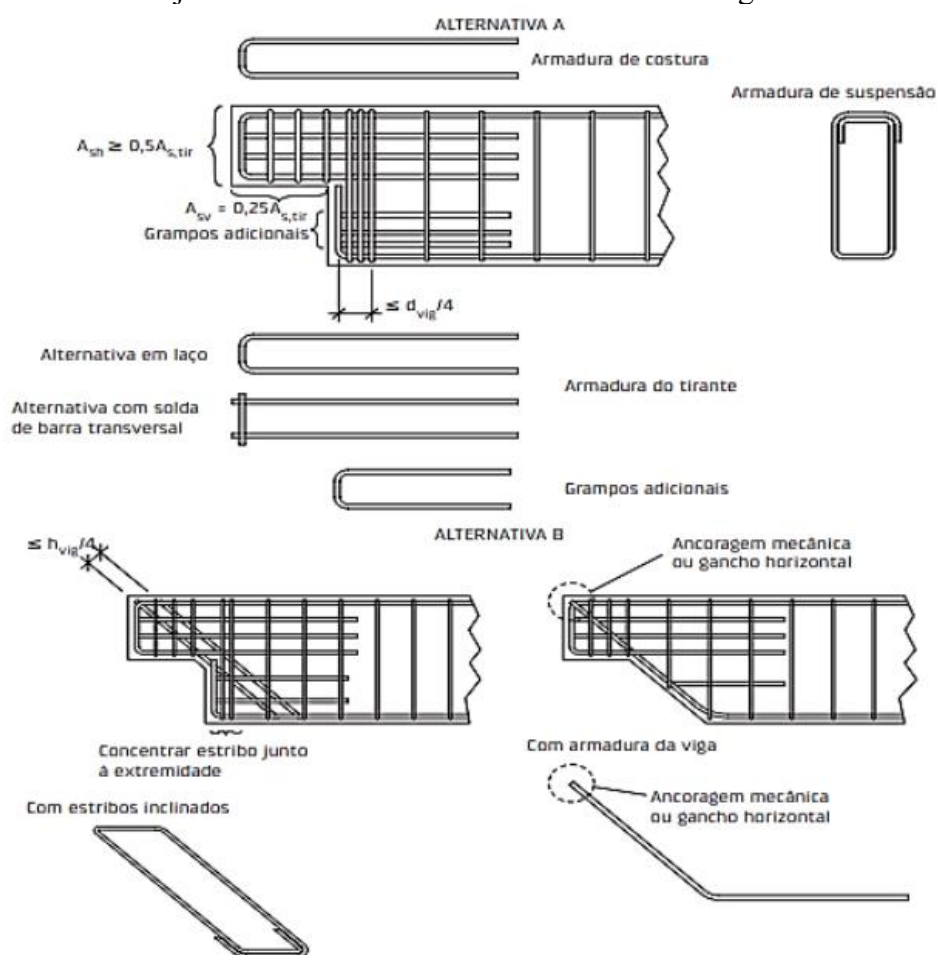
Quanto ao detalhamento das armaduras, de acordo com o autor, a ancoragem do tirante deve iniciar a partir da fissura potencial que sai do canto inferior da viga. Em conformidade

com a ABNT NBR 9062:2017, ele recomenda que a ancoragem do tirante inicie a uma distância ($d_{vig} - d$) do primeiro estribo da armadura de suspensão.

Também em acordo com a ABNT NBR 9062:2017, o autor indica que a armadura de costura deve ser distribuída em $2/3$ de d , adjacentes ao tirante, com um comprimento de $1,5l_b$ a partir do canto reentrante. Quanto à armadura de suspensão, o autor aponta que esta deve ter formato de estribo fechado, envolvendo a armadura longitudinal da viga, numa faixa de $d_{vig}/4$.

Os arranjos das armaduras nos dentes de concreto de acordo com El Debs (2017) estão apresentados na Figura 18.

Figura 18 – Arranjos das armaduras dos dentes de concreto segundo El Debs (2017)



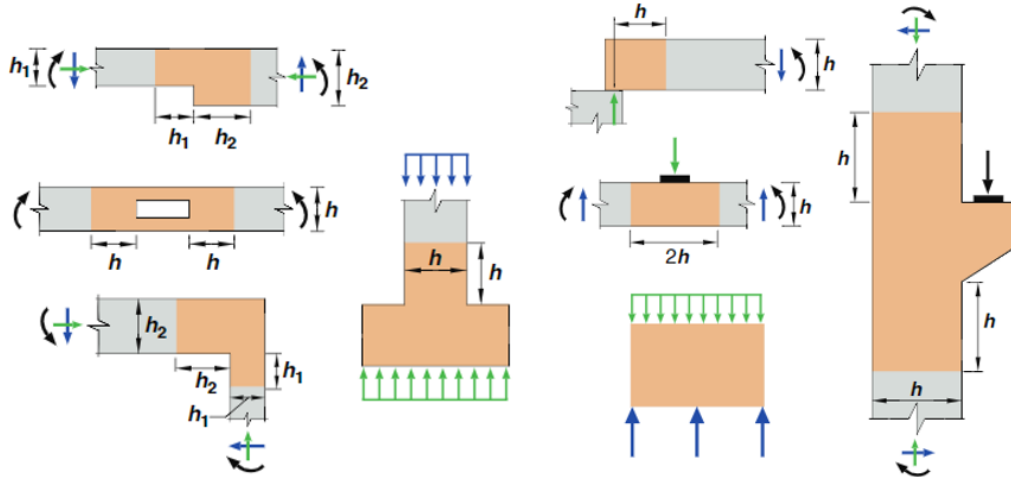
Fonte: El Debs (2017)

2.5.3 ACI 318:2019

O código que reúne diretrizes para construções em concreto do *American Concrete Institute*, o ACI 318:2019, indica o modelo de bielas e tirantes para o projeto de regiões descontínuas (regiões D). A partir do princípio de Saint-Venant, tem-se que a distribuição de

tensões ocorre a partir de uma distância com a mesma ordem de grandeza da dimensão da altura h do elemento estrutural. Portanto, as regiões D podem ser delimitadas por uma distância h a partir das descontinuidades geométricas e de carregamento, conforme apresentado na Figura 19.

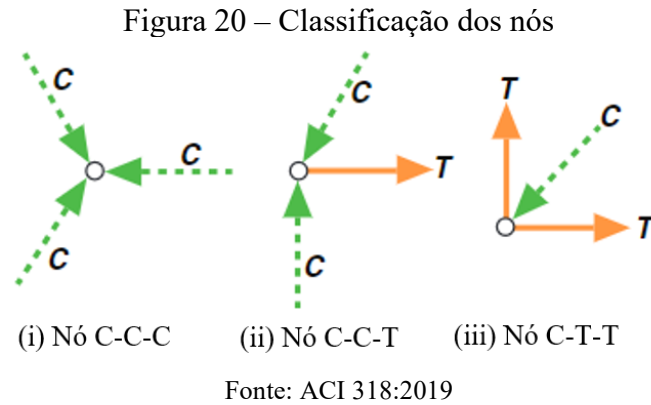
Figura 19 – Delimitação das regiões com descontinuidades geométricas e de carregamento



Fonte: ACI 318:2019

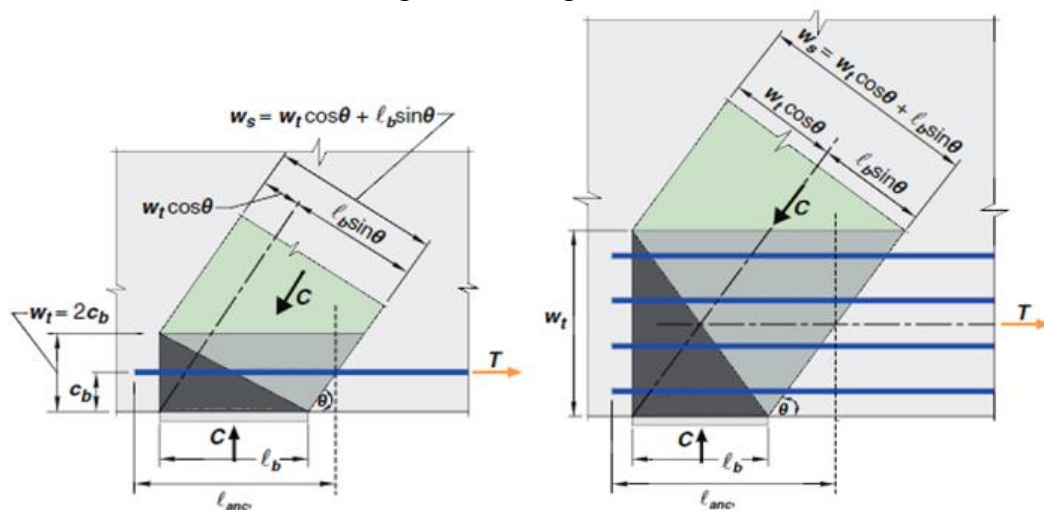
Para o dimensionamento pelo modelo de bielas e tirantes em uma região D, o ACI 318:2019 indica que são necessários os seguintes passos: a) definir e isolar cada região D; b) calcular as forças resultantes nas fronteiras de cada região D; c) selecionar o modelo e calcular as forças nas bielas e tirantes para transferir as forças resultantes através da região D; d) projetar as barras, tirantes e regiões nodais para que tenham resistência suficiente.

As bielas, tirantes e regiões nodais que compõem o modelo de bielas e tirantes têm larguras finitas e espessuras que devem ser consideradas na seleção das dimensões da treliça. Em cada nó, as forças verticais e horizontais equilibram as forças na biela. Assim, pelo menos três forças devem atuar em cada nó. Os nós são classificados de acordo com os esforços atuantes. Um nó do tipo C-C-C resiste a três forças de compressão, um nó C-C-T resiste a duas forças de compressão e uma força de tração, e um nó C-T-T resiste a uma força de compressão e duas forças de tração (ACI 318:2019). Os tipos de nós podem ser visualizados na Figura 20.



Na Figura 21, a área levemente sombreada caracteriza a região nodal. Região nodal é a parte de um elemento delimitada pela interseção da largura efetiva da biela w_s e a largura efetiva do tirante w_t .

Figura 21 – Região nodal

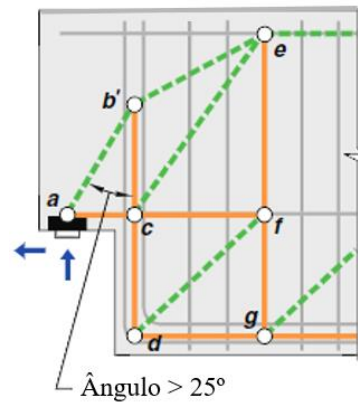


A largura efetiva da biela pode ser obtida por:

$$w_s = w_t \cos(\theta) + l_b \sin(\theta) \quad (31)$$

De acordo com o ACI 318:2019, o ângulo entre uma biela e um tirante atuando em um nó deve ser suficientemente grande para mitigar fissuras e evitar incompatibilidades. Como ilustrado no modelo para dentes de concreto da Figura 22, o ângulo entre os eixos das bielas e dos tirantes que integram o mesmo nó deve ser superior a 25° .

Figura 22 – Modelo de bielas e tirantes para dentes de concreto



Fonte: ACI 318:2019

Para cada combinação de carga aplicável, a resistência de projeto de cada biela, tirante e região nodal em um modelo de bielas e tirantes deve satisfazer $\Phi S_n \geq U$. Ou seja, a parcela de resistência deve ser superior à sollicitação. O coeficiente de redução da resistência Φ corresponde a 0,75 para todas as verificações.

Assim, a resistência nominal à compressão da biela F_{ns} e a força de compressão sollicitante de cálculo F_{us} na biela devem ser tais que:

$$\phi F_{ns} \geq F_{us} \quad (32)$$

Quando não há armadura longitudinal, F_{ns} é calculada por:

$$F_{ns} = f_{ce} A_{cs} \quad (33)$$

Contudo, quando há armadura longitudinal:

$$F_{ns} = f_{ce} A_{cs} + A_s' f_s' \quad (34)$$

Sendo A_{cs} a área da seção da região nodal, f_{ce} a resistência efetiva à compressão do concreto, A_s' a área de armadura comprimida ao longo do comprimento da biela e f_s' a tensão na armadura de compressão no eixo nominal de força da biela. F_{ns} deve ser avaliada em cada extremidade da biela e deve ser adotado o menor valor.

Para as regiões nodais, a resistência à compressão efetiva do concreto f_{ce} pode ser calculada por:

$$f_{ce} = 0,85 \cdot \beta_c \cdot \beta_s \cdot f_{ck} \quad (35)$$

Sendo f_{ck} a resistência característica à compressão do concreto, β_s o coeficiente da biela e β_c o fator de modificação de confinamento biela-nó. Os valores de β_s e β_c para cada posição da biela podem ser obtidos respectivamente na Tabela 1 e na Tabela 2.

Tabela 1 – Coeficiente da biela β_s

Localização da biela	Tipo de biela	Critério	β_s
Áreas tracionadas ou regiões de tração dos membros	Qualquer tipo	Todos os casos	0,40
		Bielas externas	Todos os casos
Demais casos	Bielas internas	Armaduras que satisfazem as linhas (a) ou (b) da Tabela 3	0,75
		Satisfazem a Equação (36)	0,75
		Ligação vigas-pilares	0,75
		Demais casos	0,40

Fonte: ACI 318:2019

Tabela 2 – Fator de modificação de confinamento biela-nó β_c

Localização	β_c
Final da biela conectada com o nó que inclui a superfície de apoio ou nó que inclui a superfície de apoio	$\beta_c < \sqrt{A_2/A_1}$ Sendo A_1 a área da superfície de apoio e A_2 a área da base inferior do volume confinado
	$\beta_c < 2,0$
Demais casos	$\beta_c = 1,0$

Fonte: ACI 318:2019

Se o uso de β_s igual a 0,75 é baseado na linha (d) da Tabela 1, as dimensões do elemento devem ser escolhidas de modo a satisfazer:

$$F_d \leq 0,42 \cdot \phi \cdot \tan(\theta) \cdot \lambda \cdot \lambda_s \sqrt{f'_c} \cdot b_d \cdot d \quad (36)$$

Onde d é a altura útil em milímetros; b_d é a largura do dente em milímetros; λ é o coeficiente de densidade do concreto, igual a 0,75 para baixas densidades e 1,0 para densidades normais; λ_s é o fator de modificação de efeito de tamanho, igual a 1,0 para elemento que tem armadura mínima distribuída, porém, caso não tenha, λ_s é definido por:

$$\lambda_s = \sqrt{\frac{2}{1 + 0,004d}} \leq 1,0 \quad (37)$$

De acordo com o ACI 318:2019, em regiões D projetadas usando o modelo de bielas e tirantes, uma armadura distribuída mínima deve ser fornecida ao longo dos eixos das bielas internas, de acordo com a Tabela 3. O espaçamento da armadura distribuída requerida não deve exceder 300 mm e o ângulo α_1 deve ser superior a 40 graus.

Tabela 3 – Armadura distribuída mínima

Restrição lateral da biela	Configuração da armadura	Razão da armadura mínima distribuída	
	Malha ortogonal	0,0025 em cada direção	(a)
Sem restrição	Armadura em uma direção cruzando a biela a um ângulo α_1	$\frac{0,0025}{\text{sen}^2(\alpha_1)}$	(b)
Com restrição	Armadura distribuída não requerida		(c)

Fonte: ACI 318:2019

Os tirantes também devem ser verificados, de modo que a força de tração solicitante de cálculo F_{ut} seja menor que a resistência nominal à tração do tirante F_{nt} :

$$\phi F_{nt} \geq F_{ut} \quad (38)$$

A resistência nominal à tração do tirante pode ser calculada por:

$$F_{nt} = A_{s,tir} f_y + A_{tp} \Delta f_p \quad (39)$$

Sendo A_{tp} igual a zero para elementos não protendidos, f_y a resistência ao escoamento do aço e $A_{s,tir}$ a área de aço da armadura do tirante. O eixo do centroide da armadura de tirante deve coincidir com o eixo do tirante assumido no modelo de bielas e tirantes. Para elementos protendidos, pode-se adotar Δf_p igual a 420 MPa para armaduras ancoradas e 70 MPa para armaduras protendidas não-ancoradas.

A verificação das regiões nodais é feita por meio da resistência nominal à compressão, calculada pelo parâmetro F_{nm} , de modo que:

$$\phi F_{nn} \geq F_{us} \quad (40)$$

$$F_{nn} = f_{ce} A_{nz} \quad (41)$$

Sendo A_{nz} a área da seção da região nodal, no qual a força resultante atua perpendicularmente e axialmente a esta, e f_{ce} a resistência à compressão efetiva do concreto para as regiões nodais, que pode ser calculada por:

$$f_{ce} = 0,85\beta_n f'_c \quad (42)$$

O fato de confinamento biela-nó β_c é análogo ao apresentado anteriormente na Tabela 2 e o coeficiente de região nodal β_n pode ser obtido na Tabela 4.

Tabela 4 – Coeficiente da região nodal	
Configuração da região nodal	β_n
Região nodal delimitada por bielas, área de apoio ou ambos	1,0
Região nodal ancorada em um tirante	0,8
Região nodal ancorada em dois ou mais tirantes	0,6

Fonte: ACI 318:2019

2.5.4 EN 1992-1-1:2010

O EN 1992-1-1:2010 também recomenda o modelo de bielas e tirantes para elementos cuja distribuição de deformações seja não linear (regiões descontínuas).

Da mesma forma que na ACI 318:2019, no projeto por meio do modelo de bielas e tirantes, o EN 1992-1-1:2010 exige o dimensionamento da armadura dos tirantes e a verificação das bielas e zonas nodais.

A verificação das bielas de compressão deve atender ao seguinte critério:

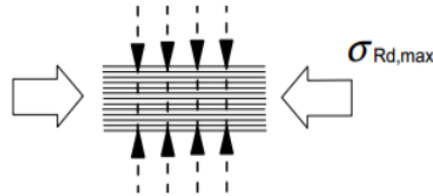
$$\sigma_{Rd,max} \geq \sigma_{cd} \quad (43)$$

Sendo $\sigma_{Rd,max}$ a tensão normal resistente de cálculo e σ_{cd} a tensão normal solicitante de cálculo. A resistência de projeto para uma biela de concreto em uma região com tensão compressiva transversal ou sem tensão transversal, conforme ilustrado na Figura 23, pode ser calculada a partir de:

$$\sigma_{Rd,max} = f_{cd} \quad (44)$$

Sendo f_{cd} a resistência de cálculo à compressão do concreto.

Figura 23 – Região com tensões de compressão transversal ou sem tensões transversais.



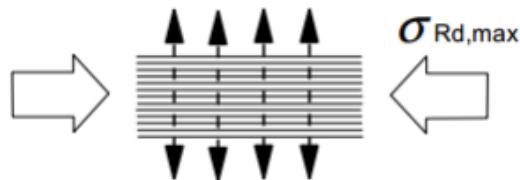
Fonte: EN 1992-1-1:2010

Contudo, para regiões submetidas a tensões de tração transversal, conforme ilustrado na Figura 24, a resistência de cálculo da biela de compressão sofre redução, de modo que:

$$\sigma_{Rd,max} = 0,6\nu f_{cd} \quad (45)$$

$$\nu = 1 - \frac{f_{ck}}{250} \quad (46)$$

Figura 24 – Região com tensões de tração transversal.



Fonte: EN 1992-1-1:2010

A resistência de cálculo à compressão do concreto pode ser obtida por:

$$f_{cd} = \frac{\alpha_{cc} f_{ck}}{\gamma_c} \quad (47)$$

Em que α_{cc} corresponde ao coeficiente que considera os efeitos de carregamentos de longa duração na resistência à compressão e os efeitos desfavoráveis provocados pela forma de aplicação da força, igual a 1,0; e γ_c corresponde ao coeficiente de minoração da resistência à compressão do concreto, igual a 1,5 para ações permanentes e a 1,2 para ações acidentais.

Por sua vez, a tensão solicitante de cálculo pode ser calculada por:

$$\sigma_{cd} = F_{cd}/A_{bie} \quad (48)$$

Sendo F_{cd} a força de compressão solicitante de cálculo e A_{bie} a área da seção da biela. A área da seção da biela pode ser determinada a partir da largura do dente de concreto b_d e da largura da biela w_s . O EN 1992-1-1:2010 não apresenta de maneira explícita como definir a largura da biela, contudo é possível calculá-la de acordo com a ACI 318:2019 conforme Equação (31).

Para determinar a área de aço do tirante, tem-se que:

$$A_{s,tir} = F_{td}/f_{yd} \quad (49)$$

$$f_{yd} = f_{yk}/\gamma_s \quad (50)$$

Em que F_{td} é a força de tração solicitante de cálculo do tirante, f_{yd} é a resistência de cálculo ao escoamento do aço, f_{yk} é a resistência característica ao escoamento do aço, com valores entre 400 e 600 MPa, e γ_s é o coeficiente de minoração da resistência ao escoamento do aço, que é igual a 1,15 para ações permanentes e a 1,00 para ações acidentais.

Conforme anteriormente mencionado, a verificação das regiões nodais deve atender à Equação (43), de modo que a resistência de cálculo da região nodal $\sigma_{Rd,max}$ seja maior ou igual à tensão solicitante de cálculo na região nodal σ_{sd} . A resistência de cálculo da região nodal pode ser calculada por meio de:

$$\sigma_{Rd,max} = kvf_{cd} \quad (51)$$

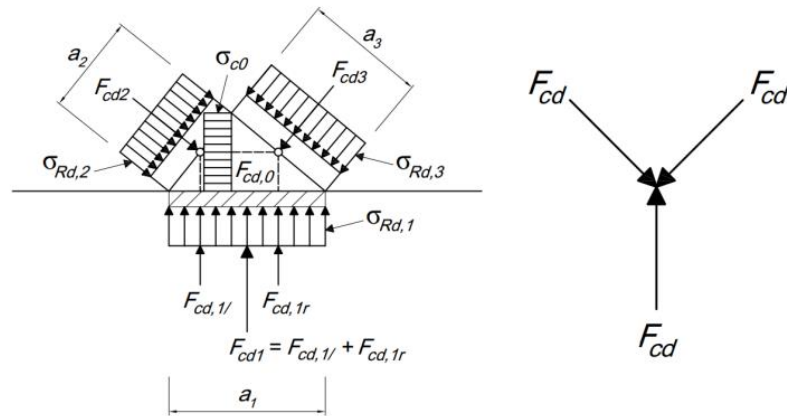
Sendo v e f_{cd} definidos respectivamente pelas Equações (46) e (47). O coeficiente k depende da configuração da região nodal conforme apresentado na Tabela 5.

Tabela 5 – Coeficiente k

Configuração da região nodal	k
Nó comprimido sem tirante (Figura 25)	1,0
Nó sujeito à compressão e à tração com armadura em uma direção (Figura 26)	0,85
Nó sujeito à compressão e à tração com armadura em duas direções (Figura 27)	0,75

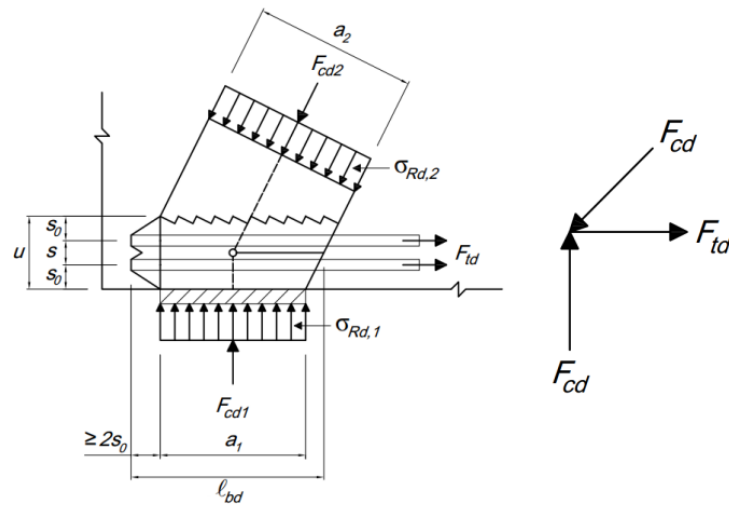
Fonte: EN 1992-1-1:2010

Figura 25 – Nó comprimido sem tirante.



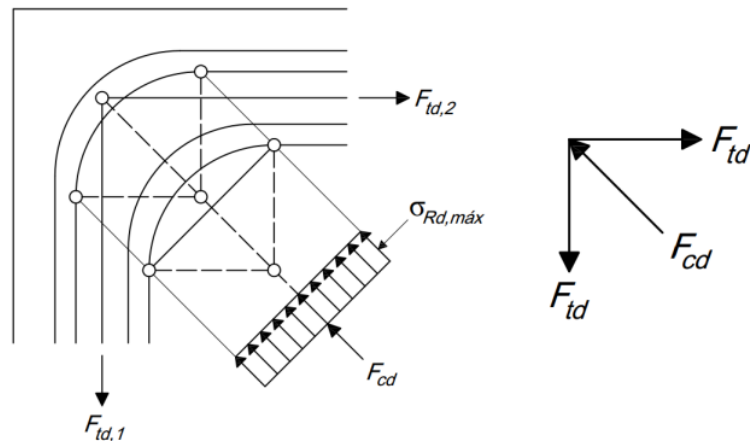
Fonte: EN 1992-1-1:2010

Figura 26 – Nó sujeito à compressão e à tração com armadura em uma direção.



Fonte: EN 1992-1-1:2010

Figura 27 – Nó sujeito à compressão e à tração com armadura em duas direções.



Fonte: EN 1992-1-1:2010

3 ANÁLISE NUMÉRICA

Neste capítulo, descreve-se a calibração do modelo numérico, abordando: (i) a seleção dos experimentos utilizados, (ii) a descrição dos parâmetros e métodos empregados na calibração, e (iii) a comparação entre os resultados obtidos e os experimentais.

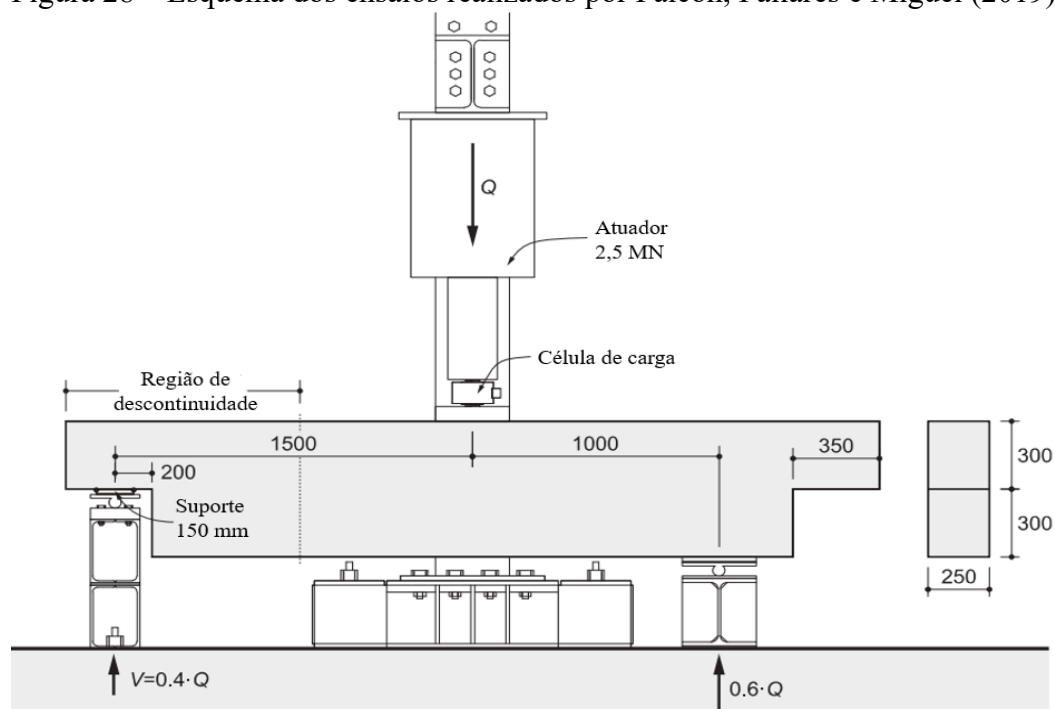
3.1 Modelos experimentais

Para a calibração do modelo numérico, foram escolhidos os ensaios experimentais de Falcón, Pallarés e Miguel (2019) e os de Rajapakse, Degée e Mihaylov (2022). Além desses, para estudar dentes que sofreram ruptura por compressão no concreto, foram escolhidos alguns espécimes de Lu, Lin e Yu (2012). Esses estudos foram selecionados por serem relevantes e por fornecerem explicitamente informações detalhadas e essenciais, como: geometria das vigas, detalhamento das armaduras, propriedades dos materiais, informações acerca do padrão de fissuração, mecanismo de ruptura de cada peça, carga última e deformação das armaduras.

3.1.1 Falcón, Pallarés e Miguel (2019)

Estes autores realizaram vinte e oito ensaios de vigas com dentes de concreto em quinze diferentes arranjos de armadura, com e sem armadura inclinada. O esquema do experimento dos pesquisadores está apresentado na Figura 28.

Figura 28 – Esquema dos ensaios realizados por Falcón, Pallarés e Miguel (2019)



Fonte: Falcón, Pallarés e Miguel (2019)

O vão das vigas é de 3000 mm, com seção retangular de 250 mm x 600 mm, com as extremidades reduzidas para 250 mm × 300 mm. As vigas são simétricas e cada extremidade foi testada separadamente e, portanto, o teste foi replicado para 15 configurações analisadas. Dentre os dentes de concreto presentes no trabalho, escolheu-se aqueles cujas armaduras de suspensão estivessem dispostas na vertical. Neste caso, foram analisados nove espécimes (DEB-1.1, DEB-1.2, DEB-1.3, DEB-1.4, DEB-1.5, DEB-1.6, DEB-1.7, DEB-1.8 e DEB-1.9).

As vigas que possuem o arranjo de armadura O.1 (DEB-1.1, DEB-1.4, DEB-1.6 e DEB-1.8) possuem a configuração de referência, que foi projetada por meio de um modelo de bielas e tirantes de acordo com a EN 1992-1-1:2004. Este modelo leva a uma relação $A_{s,tir}/A_{s,susp} \approx 1,5$. No arranjo O.2 (DEB-1.2, DEB-1.5, DEB-1.7 e DEB-1.9) a armadura do tirante foi subdimensionada em 40%, levando a $A_{s,tir}/A_{s,susp} \approx 0,9$, enquanto no arranjo O.3 (DEB-1.3) a armadura de suspensão foi subdimensionada em 60%, levando a $A_{s,tir}/A_{s,susp} \approx 3,9$.

Os parâmetros geométricos e a resistência à compressão do concreto (f_c) das vigas ensaiadas por Falcón, Pallarés e Miguel (2019) estão reunidos na Tabela 6.

Tabela 6 – Parâmetros geométricos e f_c – Falcón, Pallarés e Miguel (2019)

<i>Espécime</i>	<i>b (mm)</i>	<i>h_v (mm)</i>	<i>h_d (mm)</i>	<i>l_d (mm)</i>	<i>a (mm)</i>	<i>d (mm)</i>	<i>a/d</i>	<i>f_c (MPa)</i>
DEB-1.1 (O.1)	250	600	300	350	240	250	0,96	41,1
DEB-1.2 (O.2)	250	600	300	350	240	250	0,96	39,3
DEB-1.3 (O.3)	250	600	300	350	240	250	0,96	39,9
DEB-1.4 (O.1)	250	600	300	350	280	250	1,12	40,4
DEB-1.5 (O.2)	250	600	300	350	280	250	1,12	40,8
DEB-1.6 (O.1)	250	600	300	350	280	250	1,12	31,1
DEB-1.7 (O.2)	250	600	300	350	280	250	1,12	30,0
DEB-1.8 (O.1)	250	600	300	350	280	250	1,12	32,2
DEB-1.9 (O.2)	250	600	300	350	280	250	1,12	31,9

Fonte: Adaptado de Falcón, Pallarés e Miguel (2019)

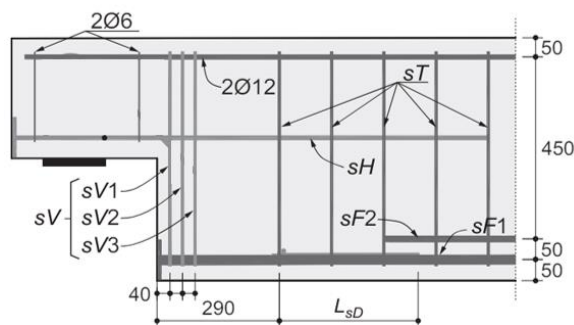
Informações referentes às propriedades e ao detalhamento das armaduras utilizadas na viga estão, respectivamente, reunidas na Tabela 7 e na Tabela 8. O esquema de detalhamento das armaduras está ilustrado na Figura 29.

Tabela 7 – Propriedades do aço – Falcón, Pallarés e Miguel (2019)

<i>Espécimes</i>	<i>(MPa)</i>	<i>Diâmetro da barra (mm)</i>						
		6	8	10	12	16	20	25
DEB: -1.1, -1.2, -1.3, -1.4, -1.5	<i>f_y</i>	605,4	619,0	566,5	585,0	-	536,2	-
	<i>f_u</i>	713,1	708,9	655,0	672,5	-	655,5	-
DEB: -1.6, -1.7, -1.8, -1.9	<i>f_y</i>	547,3	532,3	544,2	546,1	549,6	-	569,9
	<i>f_u</i>	680,1	672,1	654,3	658,5	672,8	-	695,9

Fonte: Falcón, Pallarés e Miguel (2019)

Figura 29 – Esquema do detalhamento das armaduras das vigas de Falcón, Pallarés e Miguel (2019)



Fonte: Adaptado de Falcón, Pallarés e Miguel (2019)

Tabela 8 – Detalhamento das armaduras – Falcón, Pallarés e Miguel (2019)

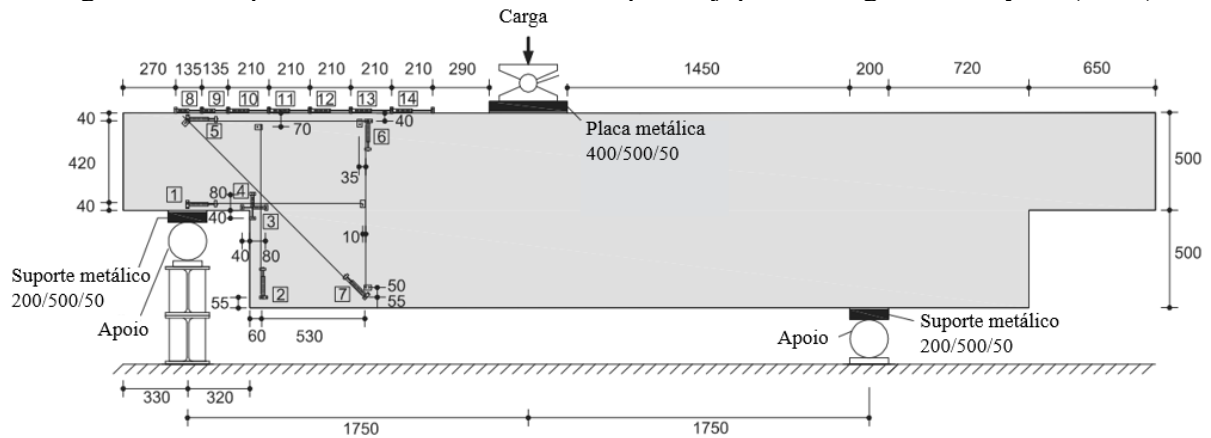
Espécime	Dente					Viga		
	$A_{s,v}$ (mm ² /m)	$A_{s,tir}$ (mm ²)	$A_{s,susp1}$ (mm ²)	$A_{s,susp2}$ (mm ²)	$A_{s,susp3}$ (mm ²)	$A_{s,f1}$ (mm ²)	$A_{s,f2}$ (mm ²)	$A_{s,v}$ (mm ² /m)
DEB-1.1 (O.1)	2Ø6 (113)	5Ø10 (393)	2Ø10 + 2Ø8 (258)	-	-	4Ø20 (1257)	-	2Ø8/0,125 (808)
DEB-1.2 (O.2)	2Ø6 (113)	3Ø10 (236)	2Ø10 + 2Ø8 (258)	-	-	4Ø20 (1257)	-	2Ø8/0,125 (808)
DEB-1.3 (O.3)	2Ø6 (113)	5Ø10 (393)	2Ø8 (101)	-	-	4Ø20 (1257)	-	2Ø8/0,125 (808)
DEB-1.4 (O.1)	2Ø6 (113)	5Ø10 (393)	2Ø8 (101)	2Ø6 (57)	2Ø8 (101)	4Ø20 (1257)	-	2Ø8/0,125 (808)
DEB-1.5 (O.2)	2Ø6 (113)	3Ø10 (236)	2Ø8 (101)	2Ø6 (57)	2Ø8 (101)	4Ø20 (1257)	-	2Ø8/0,125 (808)
DEB-1.6 (O.1)	2Ø6 (113)	4Ø16 (804)	2Ø10 (157)	2Ø12 (226)	2Ø10 (157)	4Ø25 (1963)	4Ø16 (804)	4Ø8/0,125 (1608)
DEB-1.7 (O.2)	2Ø6 (113)	4Ø12 (452)	2Ø10 (157)	2Ø12 (226)	2Ø10 (157)	4Ø25 (1963)	4Ø16 (804)	4Ø8/0,125 (1608)
DEB-1.8 (O.1)	2Ø6 (113)	5Ø12 (565)	2Ø10 (157)	2Ø6 (57)	2Ø10 (157)	4Ø25 (1963)	-	2Ø8+2Ø6/0,125 (1256)
DEB-1.9 (O.2)	2Ø6 (113)	3Ø12 (339)	2Ø10 (157)	2Ø6 (57)	2Ø10 (157)	4Ø25 (1963)	-	2Ø8+2Ø6/0,125 (1256)

Fonte: Falcón, Pallarés e Miguel (2019)

3.1.2 Rajapakse, Degée e Mihaylov (2022)

Rajapakse, Degée e Mihaylov (2022), por sua vez, realizaram oito testes em vigas pré-moldadas. O esquema de montagem do ensaio está representado na Figura 30.

Figura 30 – Esquema dos ensaios realizados por Rajapakse, Degée e Mihaylov (2022)



Fonte: Rajapakse, Degée e Mihaylov (2022)

As vigas possuem seção transversal retangular de 350 mm x 1000 mm, com dentes nas extremidades de 500 x 350 mm. O comprimento dos dentes é de 650 mm enquanto o comprimento total das vigas é de 5300 mm.

A quantidade total de armadura dos dentes foi aumentada gradualmente, de modo que um espectro de modos de falha, desde falhas por flexão até falhas por compressão, pudesse ser observado. Cada viga continha dois dentes nas extremidades com uma quantidade idêntica de armadura do tirante, mas diferentes quantidades de armadura de suspensão. O detalhamento das armaduras das vigas está apresentado na Figura 31.

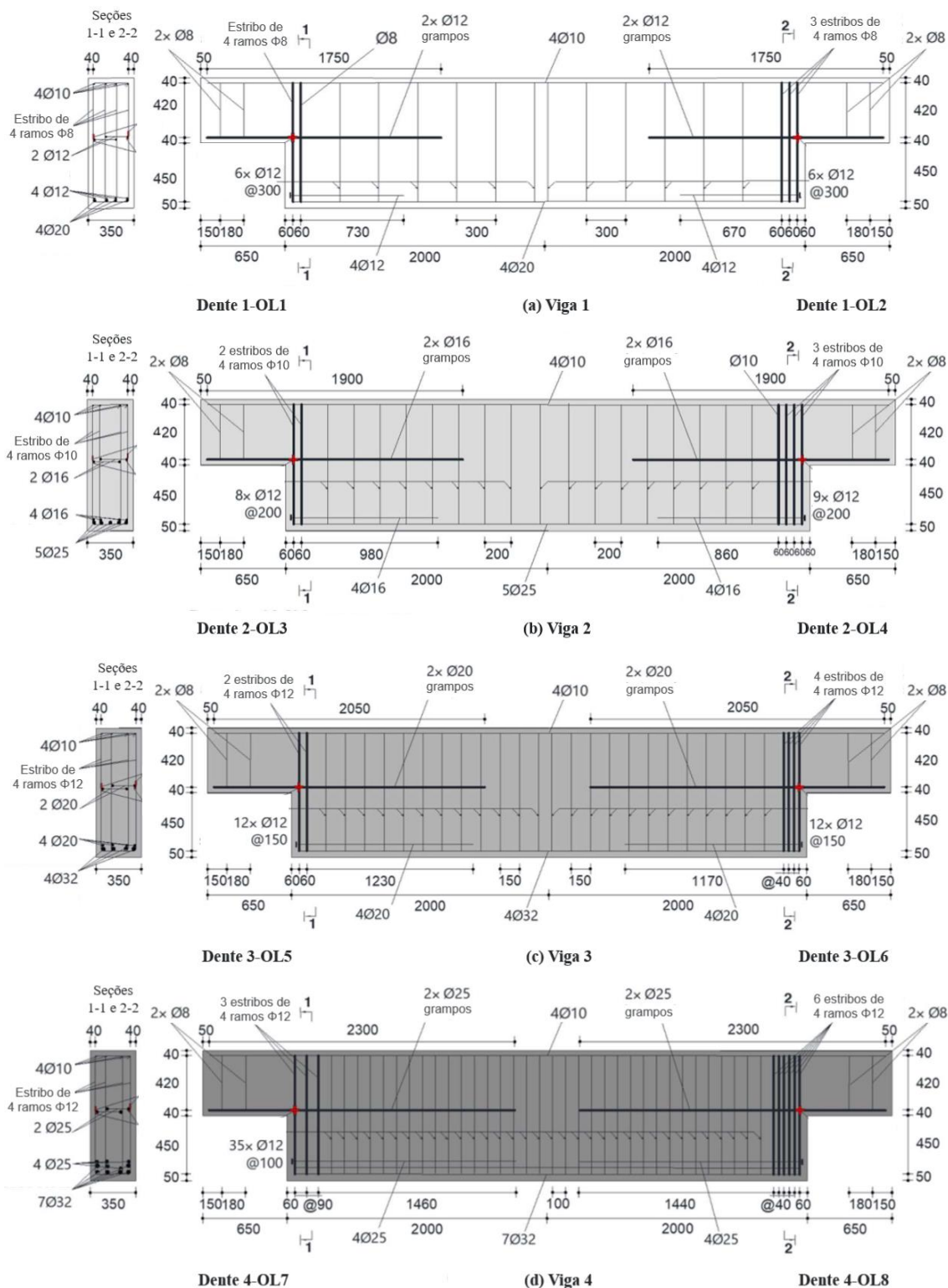
Os parâmetros geométricos e a resistência à compressão do concreto (f_c) das vigas ensaiadas por Rajapakse, Degée e Mihaylov (2022) estão reunidos na Tabela 9.

Tabela 9 – Parâmetros geométricos e f_c – Rajapakse, Degée e Mihaylov (2022)

Espécime	Viga		Dente de concreto				f_c (MPa)	
	b (mm)	h (mm)	h (mm)	l (mm)	a (mm)	d (mm)		
1-OL1	350	1000	500	650	410	460	0,89	56,8
1-OL2	350	1000	500	650	440	460	0,96	56,8
2-OL3	350	1000	500	650	410	460	0,89	56,4
2-OL4	350	1000	500	650	470	460	1,02	56,4
3-OL5	350	1000	500	650	410	460	0,89	49,6
3-OL6	350	1000	500	650	440	460	0,96	49,6
4-OL7	350	1000	500	650	470	460	1,02	52,0
4-OL8	350	1000	500	650	480	460	1,04	52,0

Fonte: Rajapakse, Degée e Mihaylov (2022)

Figura 31 – Esquema do detalhamento das armaduras das vigas de Rajapakse, Degée e Mihaylov (2022) – dimensões em mm



Fonte: Rajapakse, Degée e Mihaylov (2022)

A resistência ao escoamento, a resistência última e módulo de elasticidade do aço utilizado nas vigas estão apresentados na Tabela 10.

Tabela 10 – Propriedades do aço – Rajapakse, Degée e Mihaylov (2022)

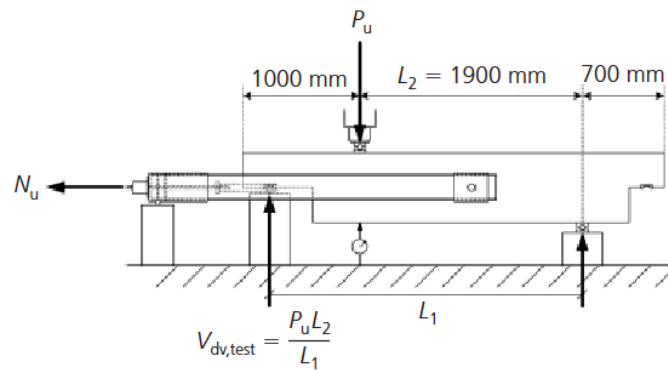
Φ (mm)	8	10	12	16	20	25	32
f_y (MPa)	521	509	537	599	598	540	615
f_u (MPa)	643	643	634	703	694	647	664
E_s (GPa)	175	187	203	198	204	204	190

Fonte: Rajapakse, Degée e Mihaylov (2022)

3.1.3 Lu, Lin e Yu (2012)

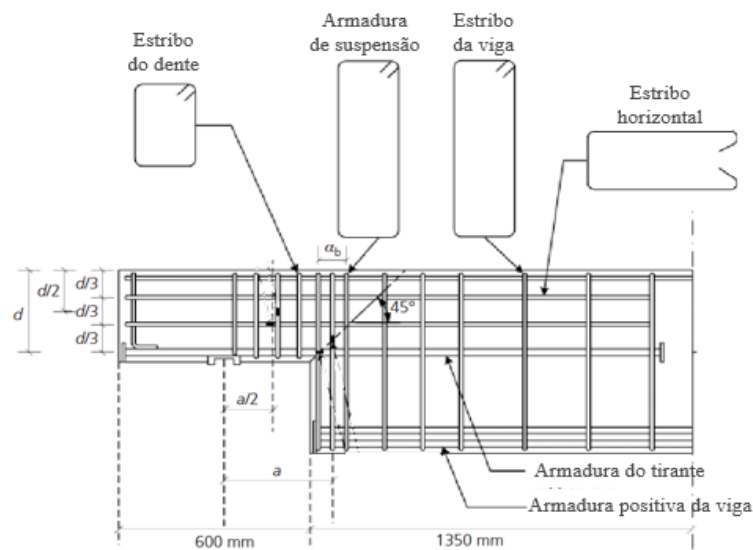
Lu, Lin e Yu (2012) realizaram testes em 12 vigas de concreto armado com dentes nas extremidades, variando a resistência à compressão do concreto, a relação a/d e a carga horizontal. O esquema dos ensaios está apresentado na Figura 32, enquanto o detalhamento das armaduras pode ser visualizado na Figura 33.

Figura 32 – Esquema dos ensaios realizados por Lu, Lin e Yu (2012)



Fonte: Lu, Lin e Yu (2012)

Figura 33 – Esquema do detalhamento das armaduras das vigas de Lu, Lin e Yu (2012)



Fonte: Lu, Lin e Yu (2012)

As vigas possuem vão de 3600 mm de comprimento, com dentes em ambas as extremidades, com comprimentos de 300 mm e 600 mm. Para a calibração do modelo numérico, foram selecionados apenas os dentes que sofreram ruptura por compressão no concreto e que não foram submetidos à carga horizontal.

Os parâmetros geométricos e a resistência à compressão do concreto (f_c) das vigas ensaiadas por Lu, Lin e Yu (2012), selecionadas para calibração, estão apresentados na Tabela 11. Por sua vez, algumas propriedades do concreto estão expostas na Tabela 12.

Tabela 11 – Parâmetros geométricos e f_c – Lu, Lin e Yu (2012)

<i>Espécime</i>	<i>b (mm)</i>	<i>h_v (mm)</i>	<i>h_a (mm)</i>	<i>l_a (mm)</i>	<i>a (mm)</i>	<i>d (mm)</i>	<i>a/d</i>	<i>f_c (MPa)</i>
01	220	600	300	300	170	269	0,63	60,6
05	220	600	300	300	170	269	0,63	60,6
07	225	600	310	300	170	279	0,61	27,7
11	220	600	300	300	170	269	0,63	27,7
13	220	600	300	300	170	269	0,63	48,5
21	220	600	415	300	245	384	0,64	48,5

Fonte: Adaptado de Lu, Lin e Yu (2012)

Tabela 12 – Propriedades do concreto – Lu, Lin e Yu (2012)

<i>f_c</i>	<i>Slump</i>	<i>Agregado</i>	<i>Massa específica</i>
<i>(MPa)</i>	<i>(mm)</i>	<i>(mm)</i>	<i>(kg/m³)</i>
27,7	180	20	2309
48,5	250	15	2362
60,6	250	13	2470

Fonte: Adaptado de Lu, Lin e Yu (2012)

A propriedades do aço estão na Tabela 13, enquanto o detalhamento das armaduras dos dentes e das vigas pode ser visualizado na Tabela 14.

Tabela 13 – Propriedades do aço – Lu, Lin e Yu (2012)

#	<i>Φ (mm)</i>	<i>Área (mm²)</i>	<i>f_y (MPa)</i>	<i>f_u (MPa)</i>	<i>Observação</i>
3	9,53	71,33	419	594	Estribos verticais e horizontais dos dentes
3	9,53	71,33	502	751	Estribos da viga
4	12,70	126,68	505	765	-
6	19,10	286,52	516	724	-
7	22,20	387,08	517	731	-
8	25,40	506,71	518	729	-

Fonte: Adaptado de Lu, Lin e Yu (2012)

Tabela 14 – Detalhamento das armaduras – Lu, Lin e Yu (2012)

Espécime	Viga			Dente de concreto			
	Positiva	Estribo - final	Estribo - meio	Tirante (mm ²)	Costura (mm ²)	Estribo (mm ²)	Suspensão (mm ²)
01	6 #7	#4 c/ 70 mm	#3 c/ 150 mm	3 #7 (1161,2)	2 #3 (285,3)	-	7 #4 (1773,5)
05	6 #6	#4 c/ 100 mm	#3 c/ 200 mm	3 #7 (1161,2)	2 #3 (285,3)	-	5 #4 (1266,8)
07	6 #6	#4 c/ 100 mm	#3 c/ 200 mm	3 #7 (1161,2)	2 #3 (285,3)	-	5 #4 (1266,8)
11	6 #6	#4 c/ 100 mm	#3 c/ 200 mm	3 #7 (1161,2)	2 #3 (285,3)	-	5 #4 (1266,8)
13	6 #7	#4 c/ 70 mm	#3 c/ 150 mm	3 #7 (1161,2)	2 #3 (285,3)	-	7 #4 (1773,5)
21	6 #8	#4 c/ 70 mm	#4 c/ 150 mm	3 #7 (1161,2)	2 #3 (285,3)	-	7 #4 (1773,5)

Fonte: Adaptado de Lu, Lin e Yu (2012)

3.2 Modelo numérico

Neste tópico são apresentados os aspectos gerais da estratégia de modelagem proposta e validada para representar os diferentes mecanismos de ruptura dos dentes de concreto. O Abaqus foi o software utilizado para simulação dos ensaios experimentais de Falcón, Pallarés e Miguel (2019), de Rajapakse, Degée e Mihaylov (2022) e de Lu, Lin e Yu (2012).

3.2.1 Geometria, condições de contorno e interface

Na Figura 34, é mostrada a modelagem bidimensional da viga DEB 1.4 de Falcón, Pallarés e Miguel (2019), exemplificando o que foi adotado para todas as vigas analisadas.

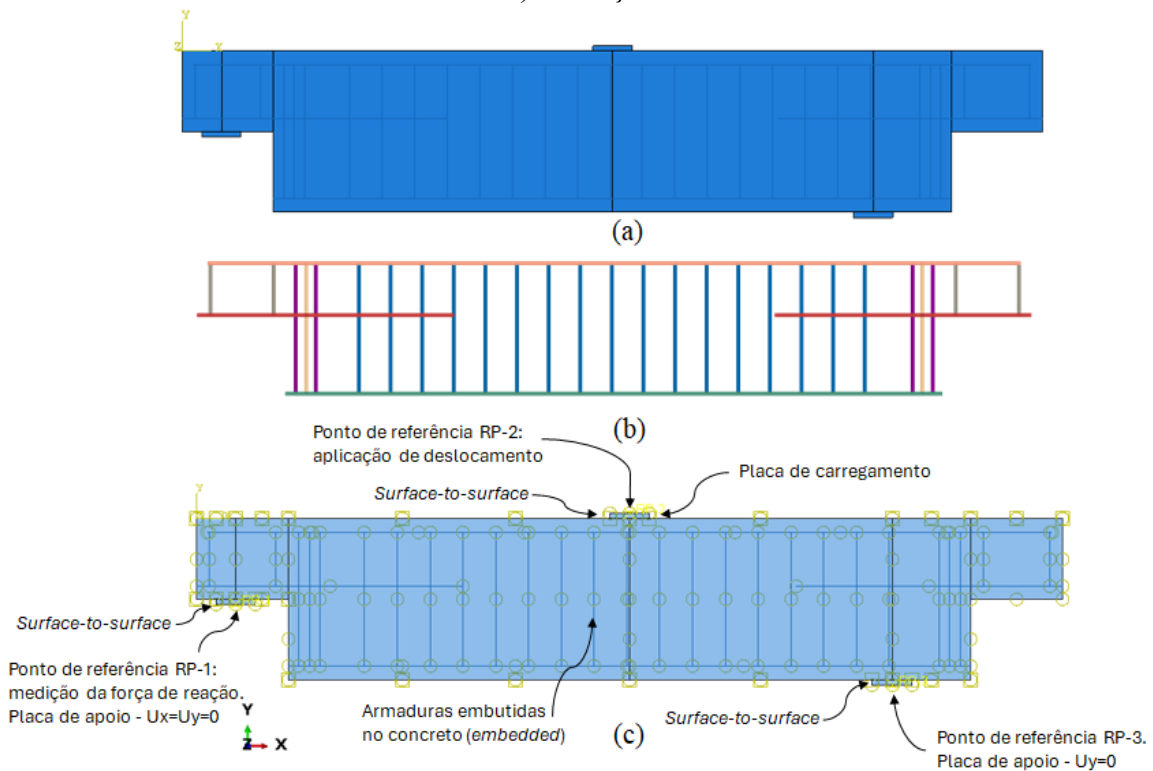
Nas condições de carregamento, optou-se por impor deslocamentos para representar o comportamento do atuador hidráulico na região de aplicação da carga, devido à necessidade de uma análise mais precisa do comportamento não linear da estrutura após o pico de carregamento. O ponto de aplicação de carga está acoplado à placa através da ferramenta *rigid body*, fazendo com que os graus de liberdade dos nós desta superfície estejam conectados com o ponto RP-2.

Foi considerado também placas rígidas de aço para os dois apoios, utilizando um ponto de referência acoplado em cada placa com *rigid body*. O apoio da esquerda teve os deslocamentos vertical e horizontal restringidos, enquanto o apoio da direita teve apenas o deslocamento vertical restringido.

A interface entre as superfícies das placas de apoio e a superfície da placa de carregamento com a viga foi modelada assumindo contato rígido do tipo *surface-to-surface*

(permitindo a separação das superfícies) e coeficiente de atrito tangente de 0,5. Quanto ao contato entre armadura e concreto, foi considerado nas simulações uma aderência perfeita, através da ferramenta *embedded* do Abaqus.

Figura 34 – a) Geometria do dente de concreto e chapas metálicas, b) configuração das armaduras e c) interações no modelo



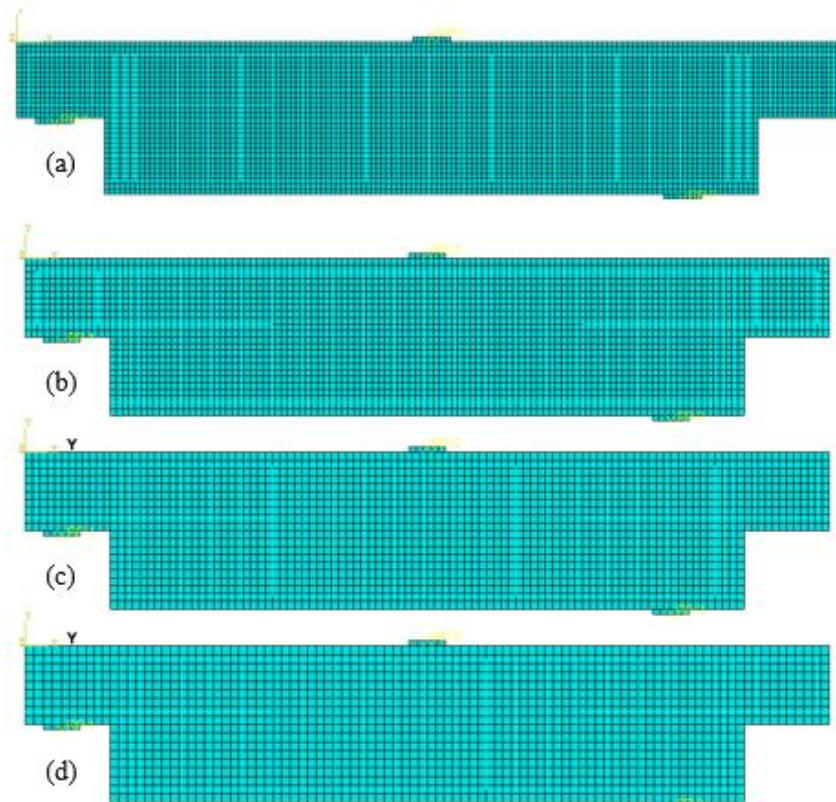
Fonte: Autora

3.2.2 Malha

A viga e as placas metálicas foram discretizadas com elementos finitos bidimensionais do tipo CPS4R, quadrilátero sob estado plano de tensão. Por sua vez, as armaduras foram discretizadas em elementos finitos de treliça T2D2 formados por 2 nós.

Visto que o tamanho do elemento finito pode afetar a simulação numérica, fez-se um teste de malha para encontrar um tamanho de elemento finito eficiente para o modelo DEB-1.4 de Falcón, Pallarés e Miguel (2019). Para tal, foram testadas malhas com elementos finitos com tamanhos médios de 20, 25, 30 e 35 mm, como pode ser visto na Figura 35. As propriedades e modelos constitutivos dos materiais adotados nestas simulações são apresentados no próximo tópico do presente capítulo.

Figura 35 – Discretização da malha com elementos finitos com tamanho a) 20 mm, b) 25 mm, c) 30 mm e d) 35 mm



Fonte: Autora

Os resultados desses testes de malha estão apresentados a seguir. Na Tabela 15, são apresentadas as relações entre a carga última experimental do apoio esquerdo (F_{exp}) e a carga última do apoio esquerdo da simulação numérica (F_{calc}) para as diferentes malhas testadas. O resultado numérico de cada teste de malha foi comparado com os resultados experimentais T1 e T2, que correspondem aos experimentos realizados em cada extremidade da viga simétrica. De acordo com Falcón, Pallarés e Miguel (2019), as reações últimas do apoio nos experimentos T1 e T2 do DEB-1.4 foram, respectivamente, 183,0 kN e 170,4 kN.

Tabela 15 – Relação F_{exp}/F_{calc} das simulações do DEB-1.4 para diferentes tamanhos da malha

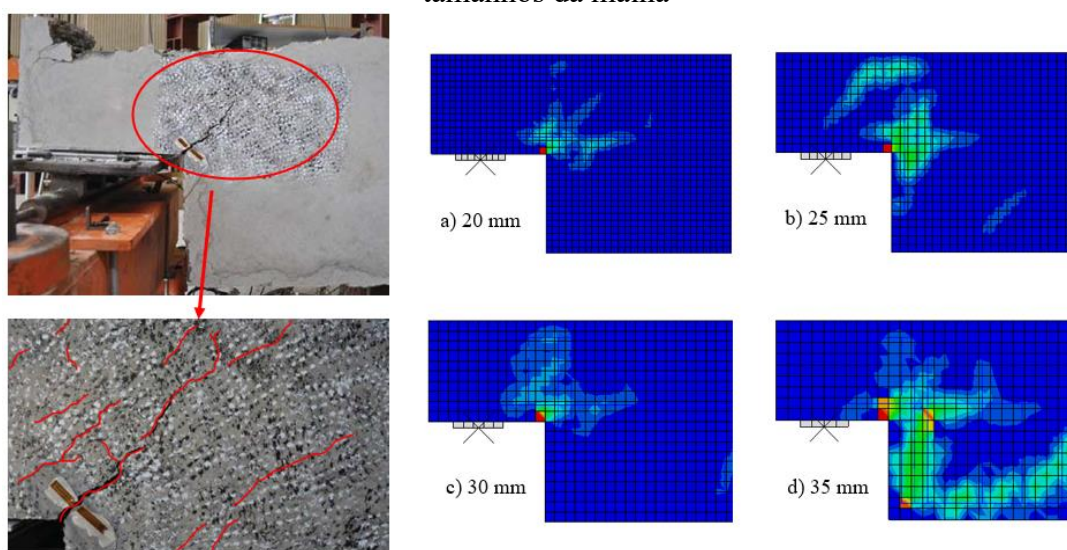
Modelo	DEB-1.4			
	20 mm	25 mm	30 mm	35 mm
F_{calc} (kN)	184,51	192,03	178,26	181,07
F_{exp}/F_{calc} - T1	0,99	0,95	1,03	1,01
F_{exp}/F_{calc} - T2	0,92	0,89	0,96	0,94
Média	0,96	0,92	0,99	0,98

Fonte: Autora

Em relação à carga última, observa-se que as médias da razão F_{exp}/F_{calc} , das simulações foram bem próximas, exceto a da malha de 25 mm, que apresentou uma diferença média de 8%. No entanto, entre as alternativas, a malha de 30 mm foi a que melhor representou o resultado experimental, com uma diferença média de apenas 1%.

Na Figura 36, é mostrada as máximas deformações plásticas no momento da carga última do DEB-1.4 para análise do padrão de fissuração.

Figura 36 – Comparação entre o padrão de fissuração do modelo experimental DEB-1.4 e dos modelos numéricos com base na distribuição das deformações plásticas para diferentes tamanhos da malha



Fonte: Autora

Em relação às máximas deformações plásticas, observa-se que todas apresentaram o início das deformações no canto reentrante, resultando no escoamento da armadura de suspensão, o que está coerente com o resultado experimental. No entanto, as malhas de 25 mm e 35 mm mostraram-se grosseiras para representar adequadamente o padrão de fissuração da peça. Por outro lado, de uma forma mais abrangente, as malhas de 20 mm e 30 mm exibiram deformações em locais e magnitudes similares às experimentais, sendo satisfatórias.

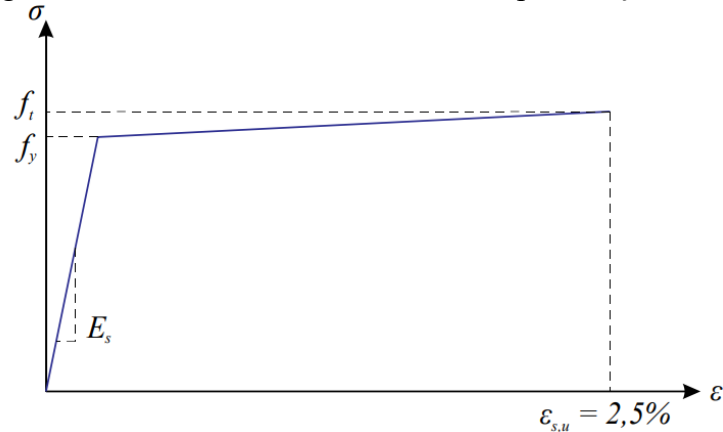
Sendo assim, por apresentar um comportamento geral mais consistente, optou-se por utilizar a malha de 30 mm nas simulações seguintes.

3.2.3 Propriedades e modelos constitutivos dos materiais

Para o aço, foi considerado o modelo simplificado do Model Code (FIB, 2010), do tipo elasto-plástico com encruamento após a tensão de escoamento, representado na Figura 37. As

propriedades mecânicas do aço utilizadas foram as dadas pelos autores dos artigos em análise e o coeficiente de Poisson usado foi padronizado igual a 0,3.

Figura 37 – Modelo constitutivo utilizado para o aço



Fonte: Reginato (2020), adaptado de Model Code (FIB, 2010)

Para o concreto, o modelo constitutivo adotado foi o *Concrete Damage Plasticity* (CDP), que é baseado na Teoria da Plasticidade e na Mecânica do Dano Contínuo. Esse modelo pressupõe que os dois principais mecanismos de falha do concreto são a fissuração por tração e o esmagamento por compressão do concreto. A evolução da superfície de plastificação é controlada pelas deformações plásticas ligadas aos mecanismos de falha sob tensões de tração e compressão (Abaqus, 2017).

Assim, o modelo constitutivo CDP é definido pelos dados de entrada referentes às tensões de compressão e tração. Os parâmetros elásticos e plásticos de entrada necessários para definir o CDP no Abaqus são:

- E_c – Módulo de elasticidade do concreto;
- ν – Coeficiente de Poisson;
- $\sigma_{t/c} \times \epsilon_{t/c}^{in}$ – Relação tensão-deformação inelástica uniaxial do concreto à tração e à compressão;
- $d_{t/c} \times \epsilon_{t/c}^{in}$ – Relação dano-deformação inelástica uniaxial do concreto à tração e à compressão;
- σ_{b0}/σ_{c0} – Razão entre as tensões biaxiais e uniaxiais de escoamento à compressão;
- K_c – Parâmetro de forma da superfície de falha;
- e – Excentricidade;
- ψ – Ângulo de dilatância;

- μ – Viscosidade.

O módulo de elasticidade do concreto foi calculado segundo o fib Model Code (FIB, 2010), conforme:

$$E_c = E_{c0} \alpha_E \left(\frac{f_{cm}}{10} \right)^{1/3} \quad (52)$$

$$f_{cm} = f_{ck} + \Delta_f \quad (53)$$

Sendo f_{ck} a resistência à compressão característica do concreto, E_{c0} igual a 21500 MPa, α_E igual a 1,0 para agregados de quartzito e Δ_f igual a 8 MPa.

O coeficiente de Poisson adotado para o concreto foi de 0,2.

A resistência à tração média do concreto (f_{ctm}) e a energia de fratura (G_F) também foram calculadas de acordo com o Model Code (FIB, 2010), respectivamente, por:

$$\begin{cases} f_{ctm} = 0,3(f_{ck})^{2/3} & \text{para } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \\ f_{ctm} = 2,2 \ln(1 + 0,1f_{cm}) & \text{para } f_{ck} > 50 \text{ MPa} \end{cases} \quad (54)$$

$$G_F = 73 f_{cm}^{0,18} \quad (55)$$

A Tabela 16 apresenta os modelos de tensão-deformação usados para descrever o comportamento dos elementos sob tração e compressão e os modelos de evolução de dano utilizados nos modelos numéricos. Foram utilizados os mesmos modelos adotados por Reginato (2020) durante a calibração do seu modelo numérico para simulações de consolos, visto que o comportamento destes é similar ao de dentes de concreto.

Tabela 16 – Modelos de tensão-deformação e parâmetros de plastificação para calibração do modelo numérico.

Parâmetros	
Comportamento à tração	Hordijk (1992)
Comportamento à compressão	Krätzig e Pölling (2004)
Dano à tração	Yu et al. (2010)
Dano à compressão	Yu et al. (2010)
Ângulo de dilatância (ψ)	35°
Excentricidade (ε)	0,1
Razão ($\sigma_{b0} / \sigma_{c0}$)	1,16
Parâmetro (Kc)	0,667
Parâmetro de viscosidade (μ)	$5 \cdot 10^{-5}$

Fonte: Autora

3.2.4 Resultados dos ensaios experimentais e das simulações numéricas

A combinação de parâmetros descrita na Tabela 16 foi avaliada para as vigas ensaiadas por Falcón, Pallarés e Miguel (2019), por Rajapakse, Degée e Mihaylov (2022) e Lu, Lin e Yu (2012). Para a calibração do modelo, uma análise comparativa foi realizada entre a curva força \times deslocamento, o padrão de fissuração e a força última obtidos numericamente e experimentalmente.

3.2.4.1 Falcón, Pallarés e Miguel (2019)

A Figura 38 mostra uma comparação entre os resultados experimentais de Falcón, Pallarés e Miguel (2019) e os resultados numéricos em termos da curva força \times deslocamento. Em todos os casos, a força é a reação no apoio esquerdo, enquanto o deslocamento trata-se do deslocamento aplicado no atuador hidráulico. O gráfico também indica o ponto em que ocorre o escoamento da primeira camada da armadura de suspensão.

Figura 38 – Força \times deslocamento do atuador experimental e numérico para os modelos de Falcón, Pallarés e Miguel (2019)

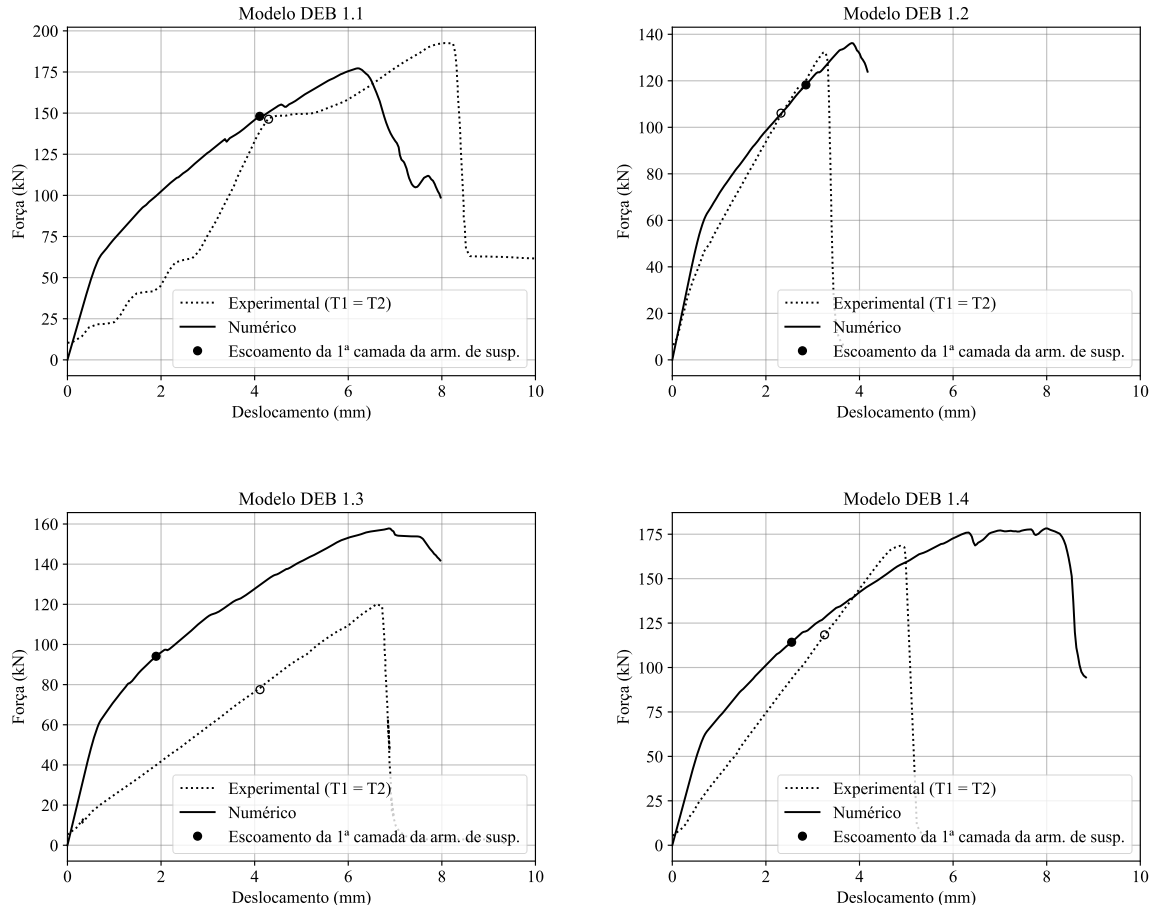
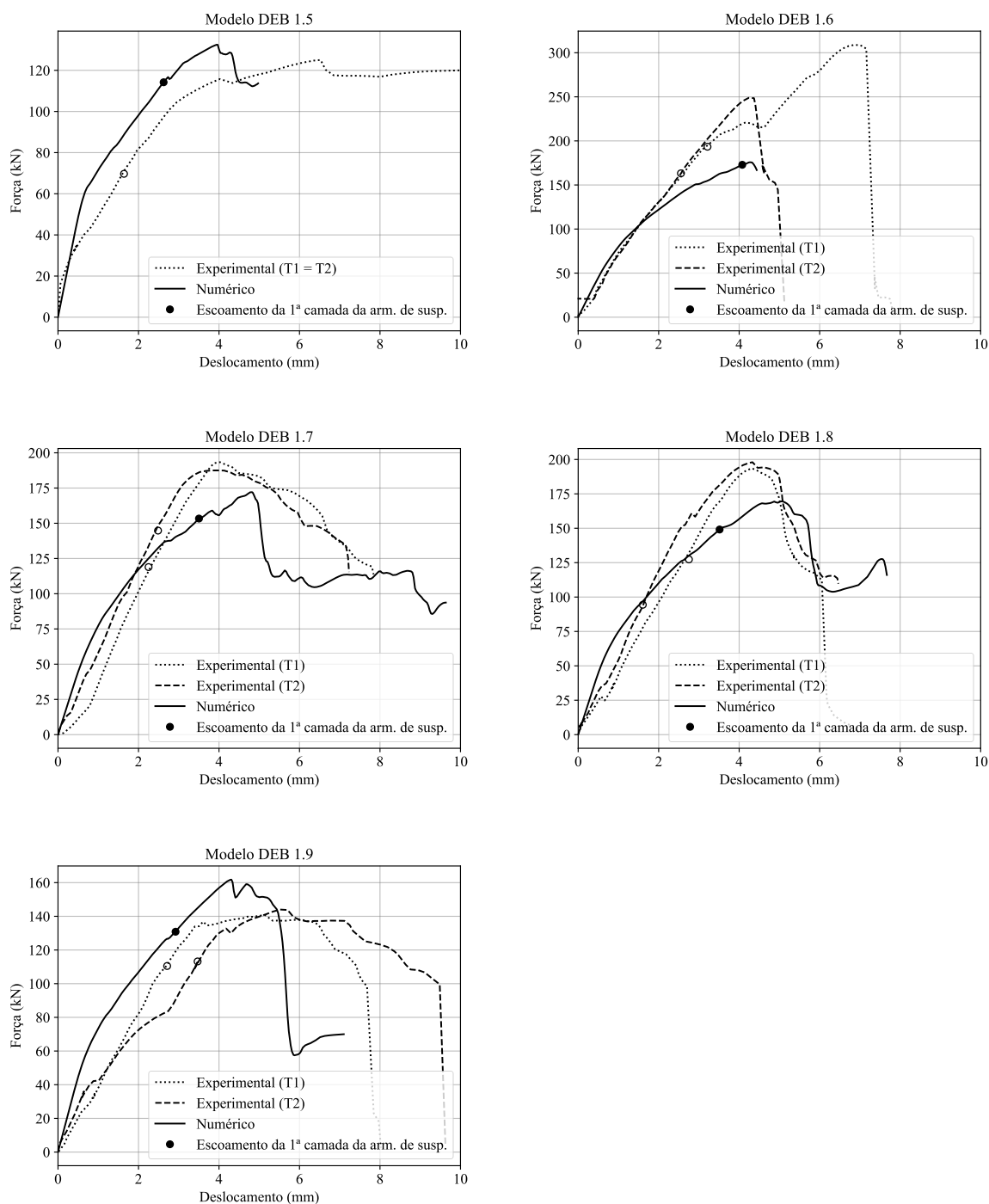


Figura 38 – Força × deslocamento do atuador experimental e numérico para os modelos de Falcón, Pallarés e Miguel (2019) (Continuação)



Fonte: Autora

É perceptível que tanto os modelos numéricos quanto os experimentais exibem um trecho linear representando o comportamento linear do concreto. Após a fissuração do concreto, a curva força × deslocamento muda de inclinação, mas permanece quase linear até atingir a plastificação da armadura. Em geral, o pós-pico das curvas indica uma ruptura frágil da ligação.

Nos gráficos dos resultados experimentais fornecidos por Falcón (2015), observa-se uma suavização na rigidez inicial das curvas, especialmente evidente nos modelos DEB-1.1, DEB-1.2, DEB-1.3, DEB-1.4 e DEB-1.6. Essa acomodação pode ser atribuída a vários fatores, como a presença de materiais menos rígidos na interface entre as vigas e os apoios, como borrachas, os quais não foram devidamente considerados nos modelos numéricos devido à falta de informações sobre esses materiais. Para efeito de comparação com os resultados numéricos, optou-se por desconsiderar essa acomodação inicial, conforme apresentado nos gráficos da Figura 38.

Em alguns casos, as curvas experimentais T1 e T2 foram adotadas como iguais por Falcón (2015). Isso ocorreu nos modelos DEB-1.1 e DEB-1.5, onde o teste T2 de cada modelo foi interrompido após o escoamento das armaduras, sem alcançar a carga última. Dessa forma, o gráfico de força \times deslocamento do teste T1 foi utilizado para representar ambos os casos. Quanto aos modelos DEB-1.2, DEB-1.3 e DEB-1.4, em um dos ensaios, após a plastificação das armaduras, o dente não estava muito danificado, por isso realizou-se um teste de recarga para determinar a carga última. No entanto, a curva do experimento no qual o teste de recarga não foi realizado foi adotada como referência.

Os resultados revelam uma notável disparidade entre os resultados numéricos e experimentais do modelo DEB-1.6. No entanto, há indícios que sugerem que esse valor discrepante seja atípico e inconsistente. Observando a curva força \times deslocamento do atuador, e conseqüentemente a força última dos experimentos, é evidente uma discrepância significativa entre os testes T1 e T2 realizados na mesma viga, como destacado no gráfico da Figura 38. Esta inconsistência entre os testes indica a possibilidade de fatores externos ou condições variáveis que podem ter afetado os resultados experimentais. Além disso, observou-se posteriormente que a mesma estratégia de modelagem numérica foi capaz de representar adequadamente um mecanismo de ruptura similar ao do DEB-1.6 para outros ensaios, o que reforça a ideia de que este ensaio apresentou um comportamento atípico.

No mais, os modelos numéricos conseguiram representar de forma adequada o modo de falha predominante das vigas, conforme evidenciado pelo padrão de fissuração destacado na Figura 39. Os locais de fissuração identificados nos modelos coincidem com aqueles observados nos ensaios experimentais.

Figura 39 – Padrão de fissuração experimental e numérico para os modelos de Falcón, Pallarés e Miguel (2019)

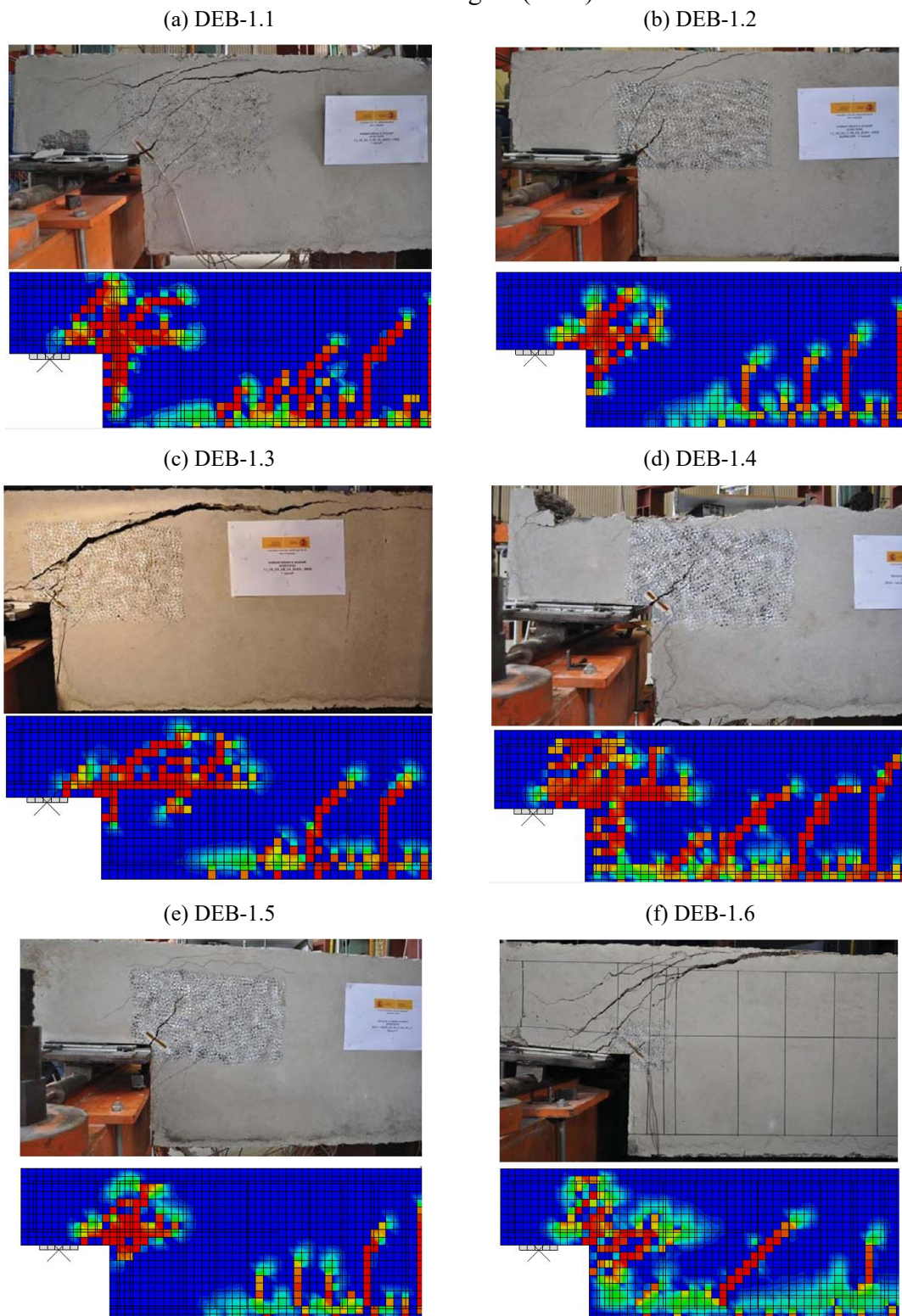
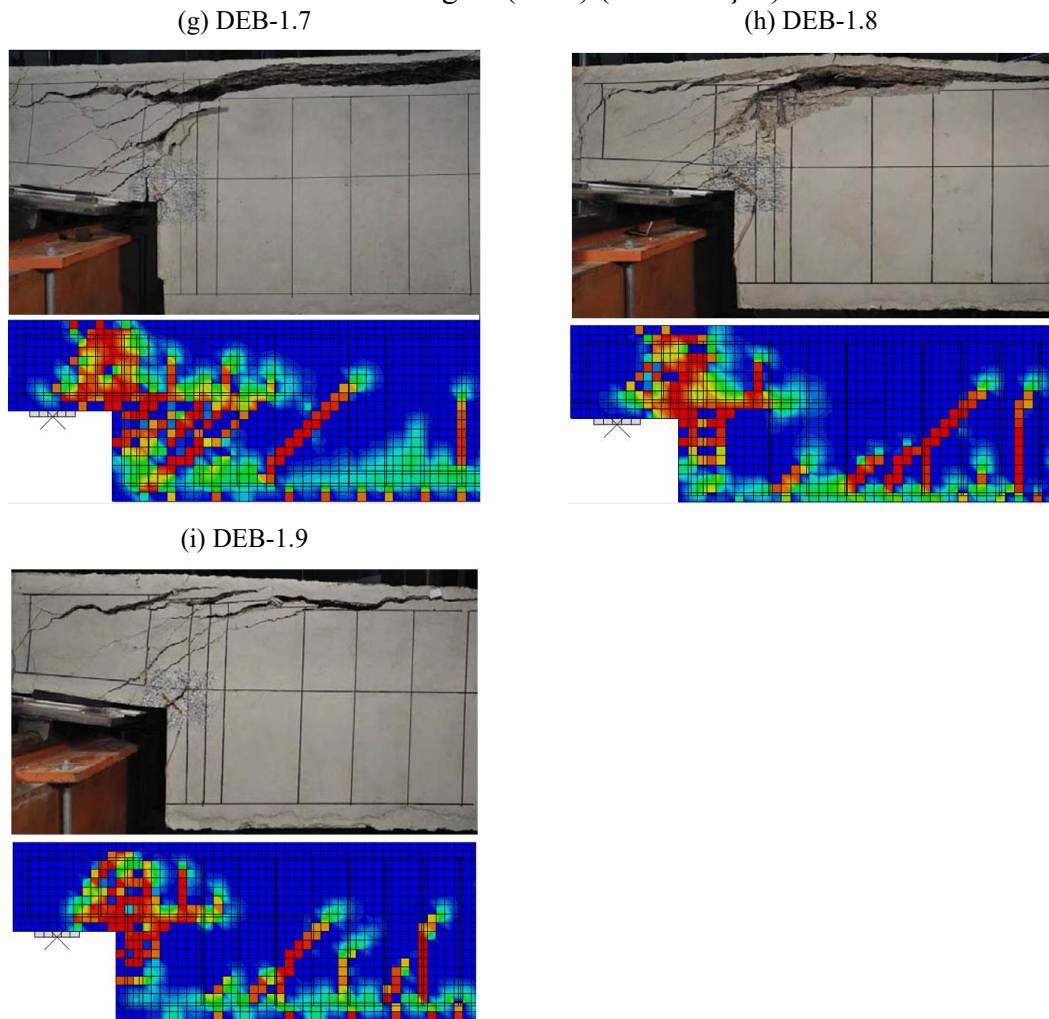


Figura 39 – Padrão de fissuração experimental e numérico para os modelos de Falcón, Pallarés e Miguel (2019) (Continuação)



Fonte: Autora

Para uma avaliação da resistência máxima, as relações entre a carga última do apoio esquerdo da simulação numérica (F_{num}) e a carga última experimental do apoio esquerdo (F_{exp}) para os experimentos T1 e T2 são apresentadas na Tabela 17. Além disso, é possível analisar e comparar os mecanismos de falha resultantes.

A relação entre as resistências experimentais e numéricas (F_{exp}/F_{num}) apresenta um valor médio de 1,07, com um coeficiente de variação de 22,5%. Contudo, ao excluir a simulação do DEB-1.6 por ser um resultado discrepante e atípico, conforme explicado anteriormente, obtém-se uma média de 1,0, com um coeficiente de variação de 12,5%. Portanto, de forma geral, observa-se que os modelos numéricos apresentaram boa aproximação com relação aos resultados experimentais de resistência máxima.

Tabela 17 – Comparação entre força última e mecanismo de falha experimentais e numéricos para os modelos de Falcón, Pallarés e Miguel (2019)

Modelo	F_{exp} (kN)	F_{num} (kN)	F_{exp}/F_{num} (kN)	Mecanismo de falha	
				Experimental	Numérico
DEB-1.1 – T1	193,6	177,2	1,09	T	S
DEB-1.1 – T2	-	177,2	-	S	S
DEB-1.2 – T1	145,8	136,2	1,07	T	T
DEB-1.2 – T2	132,7	136,2	0,97	T	T
DEB-1.3 – T1	121,1	157,8	0,77	S	S
DEB-1.3 – T2	133,0	157,8	0,84	S	S
DEB-1.4 – T1	183,0	178,3	1,03	S	S
DEB-1.4 – T2	170,4	178,3	0,96	S	S
DEB-1.5 – T1	125,3	132,5	0,95	T	S
DEB-1.5 – T2	-	132,5	-	T	S
DEB-1.6 – T1	309,2	157,8	1,76	S	S
DEB-1.6 – T2	250,9	157,8	1,43	S	S
DEB-1.7 – T1	194,4	172,1	1,13	S	S
DEB-1.7 – T2	188,8	172,1	1,10	S	S
DEB-1.8 – T1	195,3	169,6	1,15	S	S
DEB-1.8 – T2	199,1	169,6	1,17	T	S
DEB-1.9 – T1	141,7	161,8	0,88	S	S
DEB-1.9 – T2	145,5	161,8	0,90	S	S
Média			1,07		
CV			22,5%		

T - Ruína por flexão ou escoamento da armadura do tirante; S - Ruína por escoamento da armadura de suspensão.

Fonte: Autora

Além disso, é possível observar que as simulações numéricas foram precisas na previsão dos mecanismos de falha em 78% dos casos. Ou seja, na maior parte das simulações numéricas, o mecanismo de ruptura identificado e sequência de escoamento das armaduras foi similar ao dos modelos experimentais. Nota-se que os espécimes DEB-1.1 e DEB-1.8 apresentaram mecanismos de falha distintos entre o T1 e o T2, o que implica que a previsão numérica foi compatível com apenas um deles. Isso aconteceu devido ao escoamento das armaduras de suspensão e do tirante acontecer em uma sequência relativamente próxima para ambos os casos. Já o modelo DEB-1.5 apresentou, no experimento T1, a sequência de escoamento T-S2-S1, enquanto no experimento T2 foi observada a sequência T-S1-S2. Nenhuma dessas correspondeu à previsão do modelo numérico, cuja sequência foi S1-T-S2, sendo T a armadura do tirante, S1 a primeira camada da armadura de suspensão e S2 a segunda camada.

3.2.4.2 Rajapakse, Degée e Mihaylov (2022)

As curvas força \times deslocamento obtidas numericamente para os espécimes de Rajapakse, Degée e Mihaylov (2022) estão apresentadas na Figura 40. Em todos os casos, a força é a reação no apoio esquerdo, enquanto o deslocamento trata-se do deslocamento aplicado no atuador hidráulico. O gráfico também indica o ponto em que ocorre o escoamento da primeira camada da armadura de suspensão, quando isso acontece.

As curvas força \times deslocamento dos modelos experimentais não foram encontradas para fins de comparação com os resultados numéricos. Contudo, foram incluídas no gráfico duas linhas horizontais de referência: uma correspondente à resistência experimental observada e outra à força de escoamento da armadura.

Figura 40 – Força \times deslocamento do atuador obtido numericamente para os modelos de Rajapakse, Degée e Mihaylov (2022)

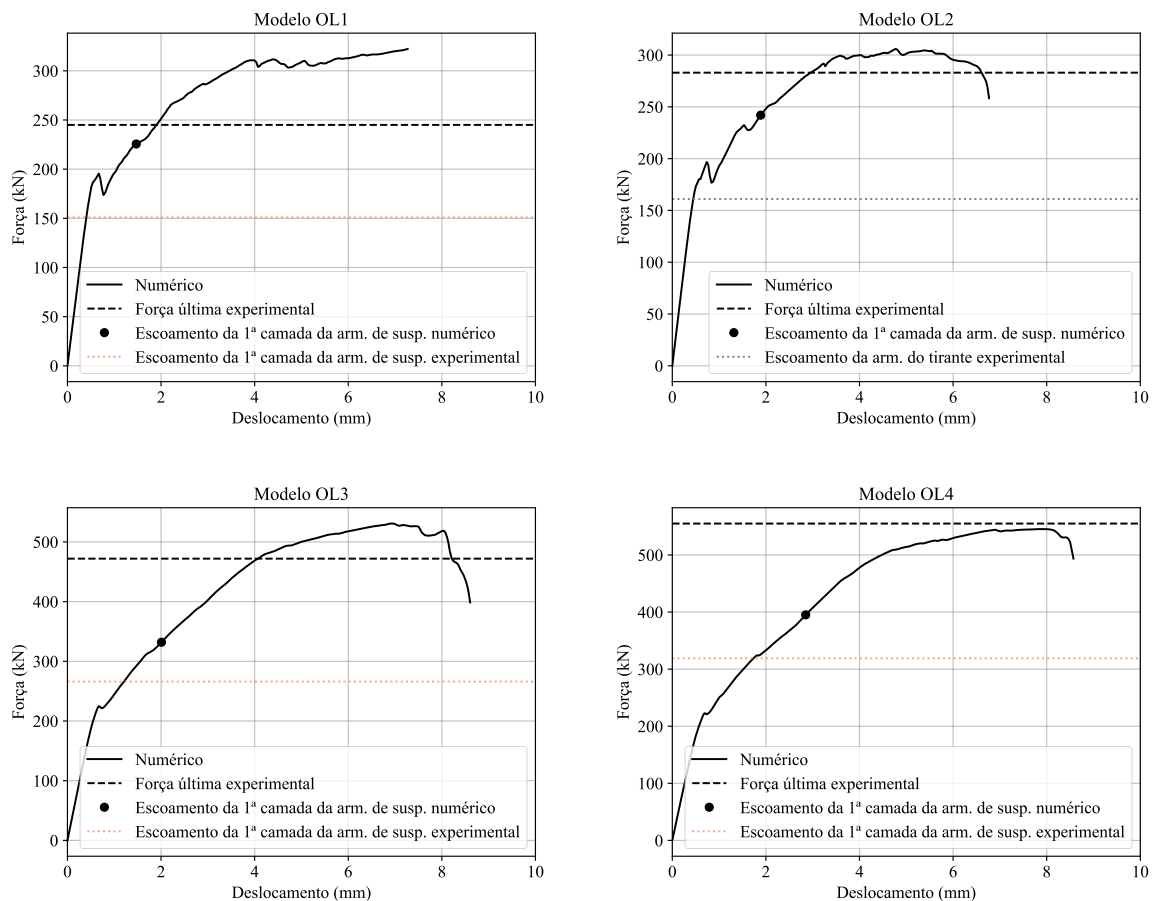
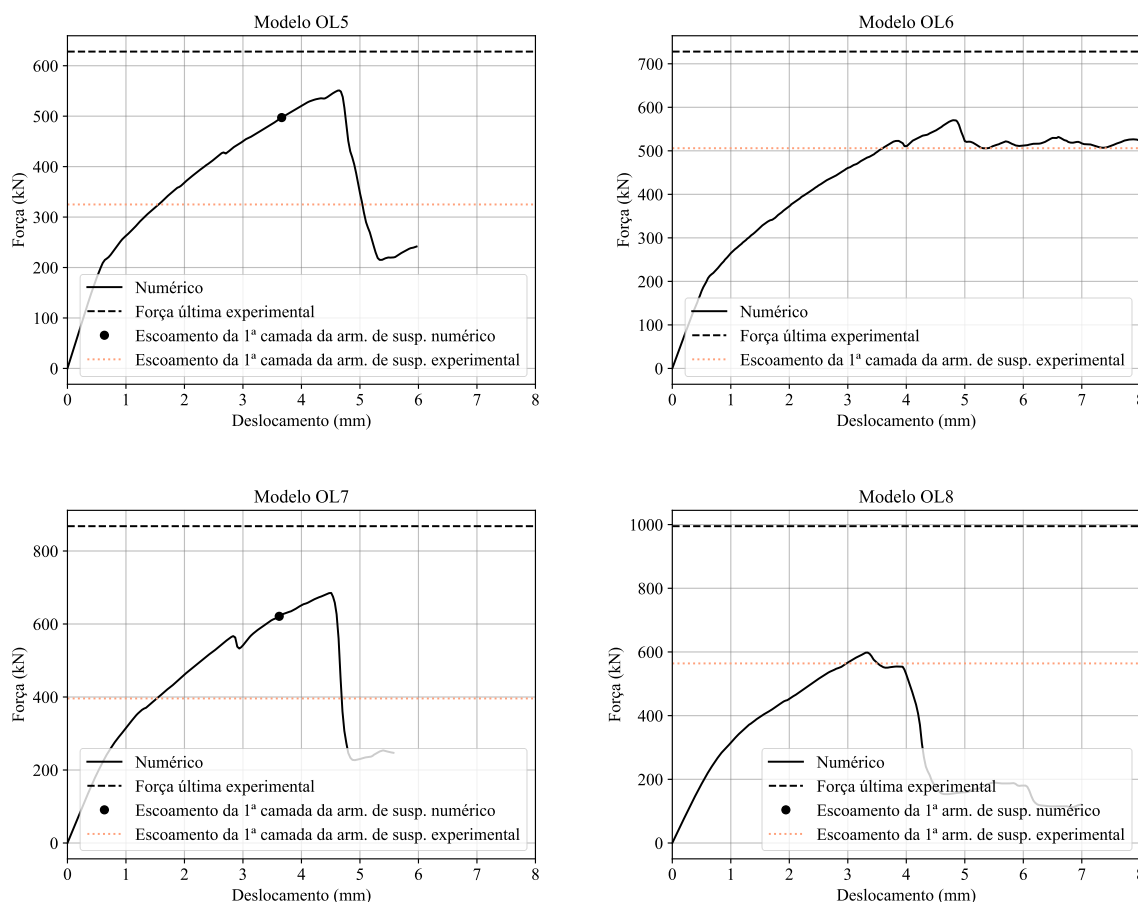


Figura 40 – Força × deslocamento do atuador obtido numericamente para os modelos de Rajapakse, Degée e Mihaylov (2022) (Continuação)

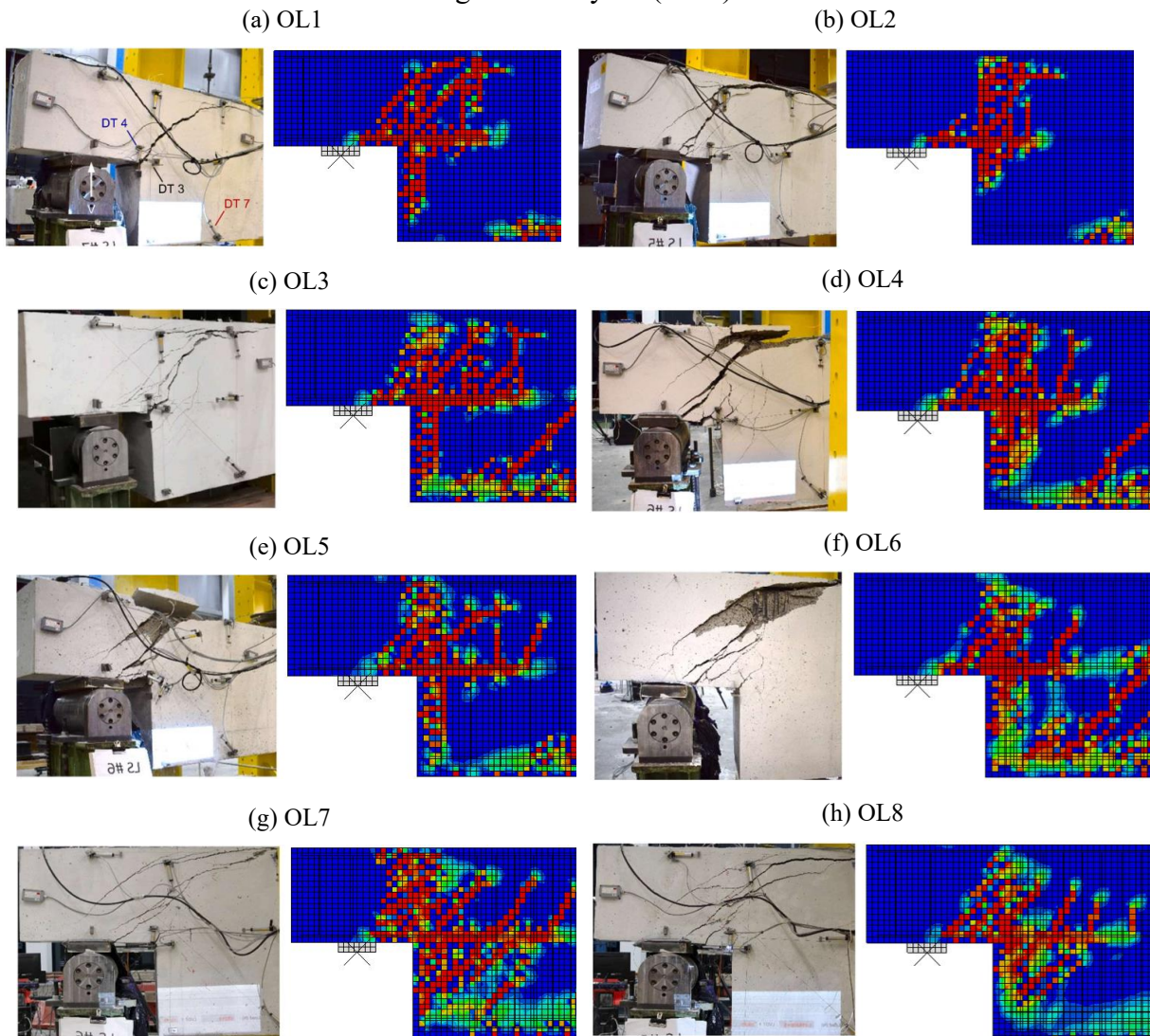


Fonte: Autora

As curvas resultantes das simulações numéricas do OL1, OL2, OL3 e OL4 exibem um platô de resistência após a plastificação das armaduras, seguido de uma queda abrupta da resistência. O modelo OL6, por sua vez, não apresentou escoamento em nenhuma das armaduras dos dentes; ainda assim, manteve um platô de resistência ao atingir a força última. Os demais, OL5, OL7 e OL8, demonstram um comportamento pós-pico que sugere uma ruptura frágil.

Para avaliar e comparar os padrões de fissuração predominantes das vigas, observa-se a Figura 41, que apresenta os resultados experimentais e numéricos na carga máxima.

Figura 41 – Padrão de fissuração experimental e numérico para os modelos de Rajapakse, Degée e Mihaylov (2022)



Fonte: Autora

No geral, os modelos numéricos conseguiram representar o padrão de fissuração das vigas, visto que os locais de fissuração identificados nos modelos coincidem com aqueles observados nos ensaios experimentais.

Percebe-se que nos modelos numéricos OL1 e OL3, assim como nos experimentais, a fissura sai do canto reentrante e propaga-se quase em linha reta até a vizinhança da armadura superior, onde se tornou horizontal em direção à placa de carga perto do pico de carga. No entanto, a diferença entre os dois modelos se dá, porque o OL3 apresenta um número consideravelmente maior de fissuras paralelas à fissura de canto, o que está em conformidade com os resultados experimentais.

Nos modelos OL2 e OL4, a maior entre as fissuras inclinadas se estende desde a borda interna da placa de apoio até alcançar a armadura longitudinal superior, e então se propaga quase horizontalmente em direção à placa de carregamento. Essas fissuras são acompanhadas de danos significativos na região onde a fissura intersectou a armadura de suspensão. As rupturas das ligações ocorreram de forma abrupta, mediante esmagamento do concreto e ruptura da armadura vertical.

Os modelos OL5, OL6, OL7 e OL8, por sua vez, foram dominados pelas fissuras inclinadas na região do dente. Em todos os casos, a ruptura ocorreu devido ao cisalhamento, após atingir o escoamento das armaduras principais.

Para uma avaliação da resistência máxima, as relações entre a carga última do apoio esquerdo da simulação numérica (F_{num}) e a carga última experimental do apoio esquerdo (F_{exp}) dos experimentos são apresentadas na Tabela 18. Além disso, é possível analisar e comparar os mecanismos de falha resultantes.

Tabela 18 – Comparação entre força última e mecanismo de falha experimentais e numéricos para os modelos de Rajapakse, Degée e Mihaylov (2022)

Modelo	F_{exp} (kN)	F_{num} (kN)	F_{exp}/F_{num} (kN)	Mecanismo de falha	
				Experimental	Numérico
OL1	245	322,21	0,76	S	S
OL2	283	305,87	0,93	T	S
OL3	472	530,77	0,89	S	S
OL4	555	545,40	1,02	S	S
OL5	628	551,03	1,14	S	S
OL6	728	570,34	1,28	S	C
OL7	868	685,12	1,27	S	S
OL8	995	598,01	1,66	S	C
Média			1,12		
CV			25,6%		

T - Ruína por flexão ou escoamento da armadura do tirante; S - Ruína por escoamento da armadura de suspensão; C - Ruína por compressão (esmagamento da biela).

Fonte: Autora

A relação entre as resistências experimentais e numéricas (F_{exp}/F_{num}) apresenta um valor médio de 1,12, com um coeficiente de variação de 25,6%. A média variou de 0,76 (OL1) a 1,66 (OL8), evidenciando uma considerável variação nos resultados. Assim, de maneira geral, observa-se que os modelos numéricos apresentaram uma aproximação inferior àquela obtida para os espécimes de Falcón, Pallarés e Miguel (2019).

Observou-se que, em um dos ensaios, cuja ruptura experimental ocorreu por cisalhamento após o escoamento da armadura de suspensão (ensaio OL8), houve uma maior discrepância entre as resistências experimentais e numéricas. Na prática, desconsiderando o ensaio OL8, a relação F_{exp}/F_{num} apresenta valor médio igual a 1,04 com coeficiente de variação de 19%, que são propriedades estatísticas mais similares às encontradas para os ensaios de Falcón, Pallarés e Miguel (2019).

Apesar disso, é possível notar que as simulações numéricas foram capazes de prever satisfatoriamente os mecanismos de falha em 62,5% dos casos.

3.2.4.3 Lu, Lin e Yu (2012)

As curvas força × deslocamento, tanto as experimentais quanto as obtidas numericamente na reprodução dos espécimes de Lu, Lin e Yu (2012), são apresentadas na Figura 42. A força corresponde à reação no apoio esquerdo, enquanto o deslocamento refere-se ao atuador hidráulico. O gráfico também destaca o ponto de escoamento da primeira camada da armadura de suspensão, quando ocorre.

Os experimentos de Lu, Lin e Yu (2012) selecionados para calibração foram, propositalmente, aqueles que sofreram ruína por esmagamento da biela. Nota-se que apenas os espécimes 7, 11 e 21 apresentaram o mesmo mecanismo de falha, porém com forças últimas significativamente inferiores às obtidas experimentalmente. Já os modelos 1, 5 e 13 apresentaram escoamento da primeira camada da armadura de suspensão e também subestimaram consideravelmente a força última.

Figura 42 – Força × deslocamento do atuador experimental e numérico para os modelos de Lu, Lin e Yu (2012)

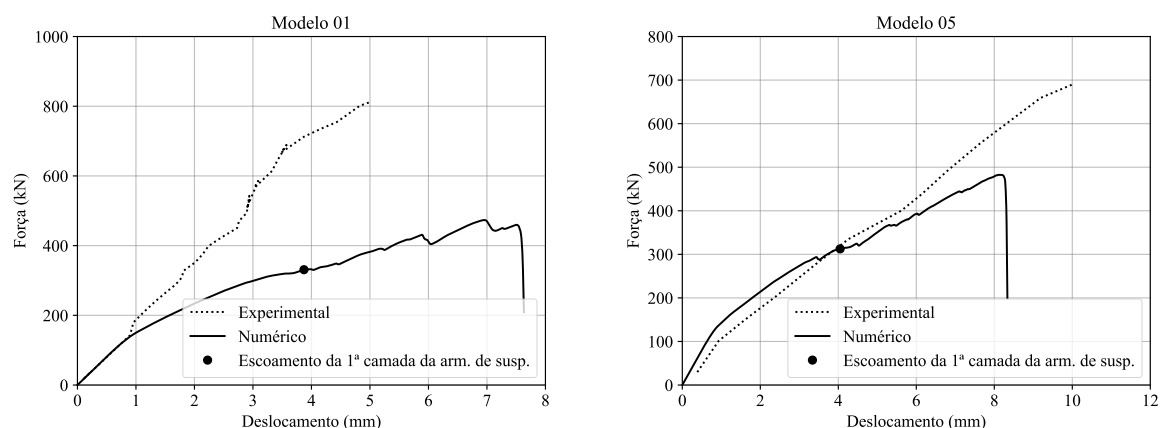
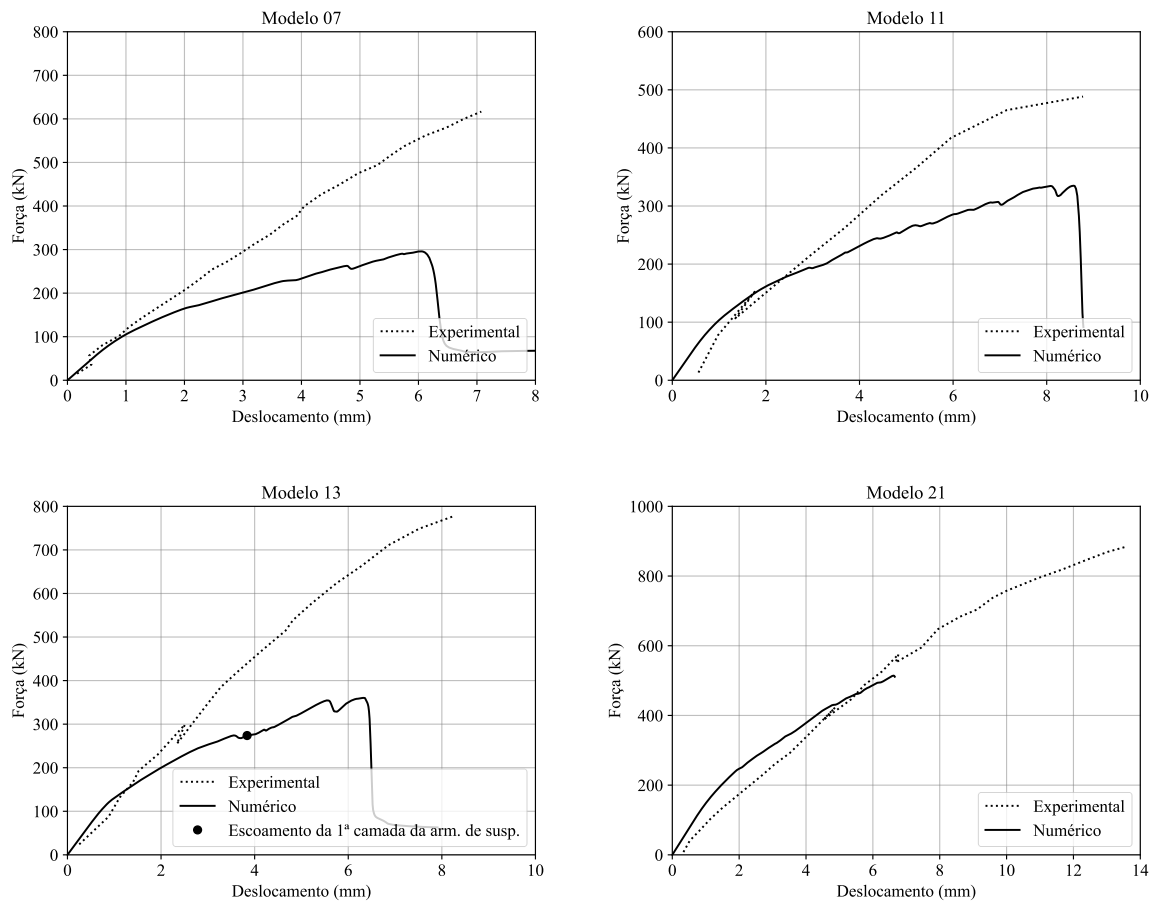


Figura 42 – Força × deslocamento do atuador experimental e numérico para os modelos de Lu, Lin e Yu (2012) (Continuação)



Fonte: Autora

Tabela 19 – Comparação entre força última e mecanismo de falha experimentais e numéricos para os modelos de Lu, Lin e Yu (2012)

Modelo	F_{exp} (kN)	F_{num} (kN)	F_{exp}/F_{num} (kN)	Mecanismo de falha	
				Experimental	Numérico
01	811	473,43	1,71	C	S
05	690	482,52	1,43	C	S
07	632	295,93	2,14	C	C
11	491	334,89	1,47	C	C
13	787	360,33	2,18	C	S
21	884	514,24	1,72	C	C
Média			1,77		
CV			18,2%		

T - Ruína por flexão ou escoamento da armadura do tirante; S - Ruína por escoamento da armadura de suspensão; C - Ruína por compressão (esmagamento da biela).

Fonte: Autora

A relação entre as resistências experimentais e numéricas (F_{exp}/F_{num}) apresenta um valor médio de 1,77, com um coeficiente de variação de 18,2%. Os valores variaram de 1,43 (Modelo 05) a 2,18 (Modelo 13), evidenciando erros elevados. De modo geral, observa-se que os modelos numéricos para Lu, Lin e Yu (2012) tiveram uma precisão inferior à obtida para os espécimes de Falcón, Pallarés e Miguel (2019) e de Rajapakse, Degée e Mihaylov (2022).

Novamente, apesar de prever corretamente o mecanismo de falha em 50% dos ensaios, o modelo numérico não apresentou um bom desempenho na previsão do comportamento de dentes que sofrem ruína por compressão do concreto na região do dente.

3.2.4.4 Sensibilidade do modelo numérico ao parâmetro de cisalhamento

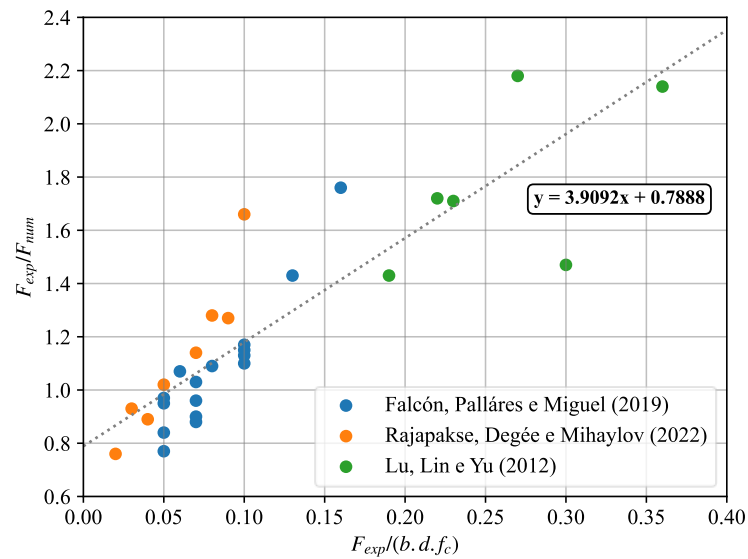
Ensaio cuja ruptura é governada pelo esmagamento da biela costumam apresentar comportamentos mais complexos e difíceis de serem capturados por qualquer modelo de previsão, seja analítico ou numérico, mesmo quando os elementos ensaiados são teoricamente similares.

Isso ocorre, entre outros fatores, porque, nesses casos, a resistência passa a depender mais diretamente de como o padrão de fissuração intercepta e prejudica a transferência de carga pelas bielas. Como a trajetória das fissuras no concreto está fortemente relacionada à distribuição da resistência à tração na peça, é natural que surjam discrepâncias significativas nos resultados. Esse tipo de desvio nos resultados numéricos também foi observado por Sousa et al. (2023) e Henze (2019) em estudos sobre a resistência à força cortante de lajes submetidas a cargas concentradas próximas ao apoio.

Diante dessa questão, investigou-se a sensibilidade do modelo numérico ao parâmetro de cisalhamento experimental. Esse parâmetro é adimensional e definido como a razão entre a tensão de corte atuante e a resistência à compressão do concreto, expressa por $F/(b \cdot d \cdot f_c)$.

Ao analisar a dispersão dos erros em função do parâmetro de cisalhamento experimental, observou-se uma tendência linear, ilustrada na Figura 43. Verifica-se que, de fato, o erro do modelo tende a aumentar à medida que o parâmetro de cisalhamento experimental cresce. Por esse motivo, alguns resultados de Rajapakse, Degée e Mihaylov (2022) e todos os de Lu, Lin e Yu (2012) apresentaram razões F_{exp}/F_{num} elevadas.

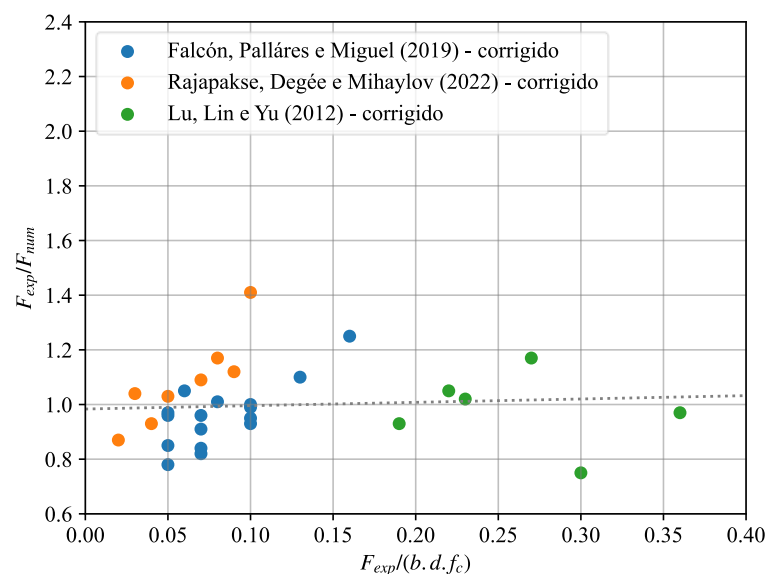
Figura 43 – Sensibilidade do modelo numérico ao parâmetro de cisalhamento na previsão da força última dos dentes



Fonte: Autora

Para ajustar os resultados numéricos, pode-se aplicar um Fator de Correção (FC) à força obtida numericamente. Esse coeficiente é determinado por meio da equação obtida de uma regressão linear da dispersão dos resultados apresentados na Figura 43. Com essa correção, os valores de F_{exp}/F_{num} passam a flutuar em torno de 1,0, conforme demonstrado na Figura 44. Os resultados detalhados desse ajuste são apresentados na Tabela 20.

Figura 44 – Resultados numéricos corrigidos



Fonte: Autora

Tabela 20 – Comparação entre força última experimental e a numérica corrigida

Referência	$F_{exp}/(b \cdot d \cdot f_c)$	F_{exp}/F_{num}	FC	F_{exp}/F_{num} ajustado
DEB 1.1 – T1	0,08	1,09	1,08	1,01
DEB 1.2 – T1	0,06	1,07	1,02	1,05
DEB 1.3 – T1	0,05	0,77	0,98	0,78
DEB 1.4 – T1	0,07	1,03	1,07	0,96
DEB 1.5 – T1	0,05	0,95	0,98	0,96
DEB 1.6 – T1	0,16	1,76	1,41	1,25
DEB 1.7 – T1	0,10	1,13	1,19	0,95
DEB 1.8 – T1	0,10	1,15	1,17	0,99
Falcón, Pallarés e Miguel (2019) DEB 1.9 – T1	0,07	0,88	1,07	0,82
DEB 1.1 – T2	-	-	-	-
DEB 1.2 – T2	0,05	0,97	1,00	0,97
DEB 1.3 – T2	0,05	0,84	1,00	0,85
DEB 1.4 – T2	0,07	0,96	1,05	0,91
DEB 1.5 – T2	-	-	-	-
DEB 1.6 – T2	0,13	1,43	1,29	1,10
DEB 1.7 – T2	0,10	1,10	1,18	0,93
DEB 1.8 – T2	0,10	1,17	1,18	1,00
DEB 1.9 – T2	0,07	0,90	1,07	0,84
	Média	1,07		0,96
	CV	22,5%		12,0%
OL1	0,02	0,76	0,88	0,87
OL2	0,03	0,93	0,89	1,04
OL3	0,04	0,89	0,96	0,93
Rajapakse, Degée e Mihaylov (2022) OL4	0,05	1,02	0,99	1,03
OL5	0,07	1,14	1,05	1,09
OL6	0,08	1,28	1,09	1,17
OL7	0,09	1,27	1,13	1,12
OL8	0,10	1,66	1,18	1,41
	Média	1,12		1,08
	CV	25,6%		15,4%
01	0,23	1,71	1,67	1,02
05	0,19	1,43	1,54	0,93
Lu, Lin e Yu (2012) 07	0,36	2,14	2,21	0,97
11	0,30	1,47	1,96	0,75
13	0,27	2,18	1,86	1,17
21	0,22	1,72	1,63	1,05
	Média	1,77		0,98
	CV	18,2%		14,5%
	Média	1,23		1,00
	CV	31,2%		14,1%

Fonte: Autora

Com o ajuste, a média da razão F_{exp}/F_{num} para os modelos de Falcón, Pallarés e Miguel (2019) torna-se 0,96, com um coeficiente de variação de 12,0%; para os modelos de Rajapakse,

Degée e Mihaylov (2022), o valor passa para 1,08, com um coeficiente de variação de 15,4%; e, para os de Lu, Lin e Yu (2012), a média ajustada é de 0,98, com um coeficiente de variação de 14,5%. Assim, o erro médio geral do modelo numérico calibrado é reduzido para 1,00, com um coeficiente de variação de 14,1%, o que pode ser considerado satisfatório.

4 ANÁLISE DOS MODELOS TEÓRICOS DE PREVISÃO DA CAPACIDADE RESISTENTE DOS DENTES

Além da análise numérica, é importante realizar uma análise do nível de precisão de modelos analíticos para a previsão do comportamento estrutural dos dentes de concreto, visto que estes modelos são os mais empregados na prática profissional de engenharia.

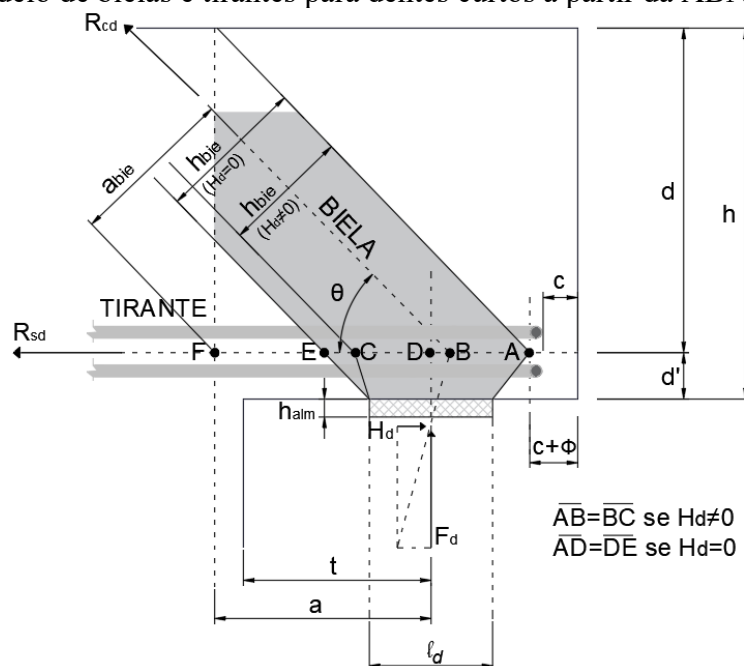
Com esse fim, conforme realizado por Silva (2017), calculou-se a força de ruína dos dentes de concreto experimentados por Falcón, Pallarés e Miguel (2019), por Rajapakse, Degée, Mihaylov (2022) e Lu, Lin e Yu (2012) a partir de: (i) ABNT NBR 9062:2017 e ABNT NBR 6118:2023, (ii) El Debs (2017), (iii) ACI 318:2019 e (iv) EN 1992-1-1:2010.

4.1 ABNT NBR 9062:2017 e ABNT NBR 6118:2023

Conforme especificado pela ABNT NBR 9062:2017 e ABNT NBR 6118:2023, no processo de dimensionamento do dente curto de concreto, é necessário realizar estimativas para a armadura do tirante e a armadura de suspensão como é feito para consolos curtos.

Além disso, as normas demandam a verificação da tensão de compressão na área do dente. Para tal, de acordo com a ABNT NBR 9062:2017, deve-se encontrar a largura da biela comprimida e a respectiva tensão por processo gráfico. A geometria do modelo de bielas e tirantes está apresentado na Figura 45.

Figura 45 – Modelo de bielas e tirantes para dentes curtos a partir da ABNT NBR 9062:2017



Fonte: Adaptado de ABNT NBR 9062:2017

Os parâmetros geométricos podem ser calculados por:

$$\overline{AB} = l - \left(t + c + \phi + \frac{d'H}{F} \right) \quad (56)$$

$$\theta = \arctg \left(\frac{d}{a + l - t - c - \phi} \right) \quad (57)$$

$$h_{bie} = 2\overline{AB} \cdot \text{sen}(\theta) \quad (58)$$

$$a_{bie} = \left(a + \frac{d'H}{F} \right) \text{sen}(\theta) \quad (59)$$

Sendo l o comprimento do dente.

Fazendo o equilíbrio da treliça, tem-se:

$$R_{cd}a_{bie} = F \cdot a + H \cdot (d' + h_{alm}) \quad (60)$$

Resultando em um valor de tensão na biela de:

$$\sigma_c = (F \cdot a + H \cdot d' + H \cdot h_{alm}) \cdot \frac{1}{a_{bie}h_{bie}b_d} \quad (61)$$

Assim, quando a força horizontal é nula, a força de ruína por esmagamento do concreto $F_{r,c}$ pode ser calculada ao isolar F , de modo que:

$$F_{r,c} = \sigma_c(a_{bie} \cdot h_{bie} \cdot b_d)/a \quad (62)$$

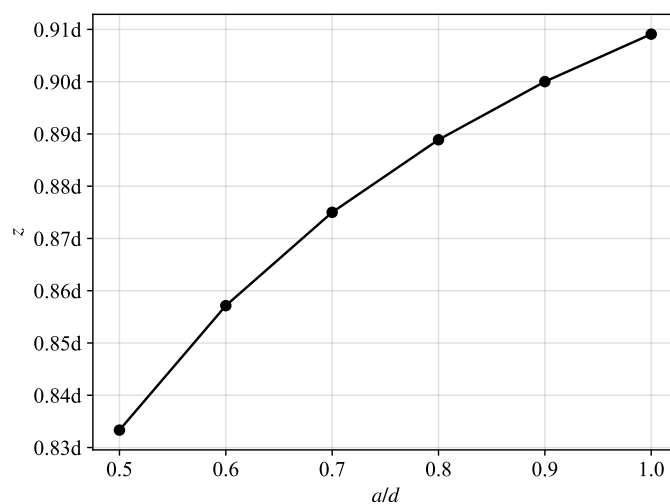
Para dentes curtos, a estimativa para força de ruína por escoamento da armadura do tirante $F_{r,tir}$ se dá a partir da Equação (11). Ao isolar F , é possível obter a estimativa da força de ruína por escoamento da armadura do tirante por:

$$F_{r,tir} = \frac{(A_{s,tir}f_{y,tir} - H)}{(0,1 + a/d)} \quad (63)$$

Sendo a a distância entre o ponto de aplicação da força e o CG da armadura de suspensão, d a altura útil do dente de concreto, $A_{s,tir}$ a área de aço da armadura do tirante, $f_{y,tir}$ a resistência ao escoamento da armadura do tirante e H a força horizontal.

O braço de alavanca $z = \alpha d$ da força do tirante $F_{r,tir}$ segundo o modelo de bielas e tirantes da ABNT NBR 9062:2017, em função da razão a/d , segue a tendência apresentada no gráfico da Figura 46.

Figura 46 – Braço de alavanca z da força do tirante segundo ABNT NBR 9062:2017



Fonte: Autora

Além da armadura do tirante, a ABNT NBR 9062:2017 aponta a importância da armadura de suspensão para resistir à totalidade das cargas verticais aplicadas por meio da resistência ao escoamento do aço. Assim, a partir da Equação (15), é possível assumir que a força de ruína por escoamento da armadura de suspensão pode ser obtida por:

$$F_{r,susp} = A_{s,susp} f_{y,susp} \quad (64)$$

Sendo $A_{s,susp}$ a área de aço da armadura de suspensão e o $f_{y,susp}$ a resistência ao escoamento da armadura de suspensão.

A força de ruína que dita a capacidade resistente dos dentes de concreto curtos, de acordo com a ABNT NBR 9062:2017, é o menor valor entre os encontrados através das Equações (62), (63) e (64).

Os resultados analíticos para a força de ruína para os dentes analisados de acordo com a ABNT NBR 9062:2017 estão apresentados na Tabela 21.

Tabela 21 – Comparação entre as forças de ruína experimentais e analíticas de acordo com a ABNT NBR 9062:2017

Referência	Modelo	F_{rc} (kN)	$F_{r,tir}$ (kN)	$F_{r,susp}$ (kN)	F_{calc} (kN)	F_{exp} (kN)	F_{exp}/F_{calc}
Falcón, Pallarés e Miguel (2019)	DEB-1.1	763,7	210,0	151,4	151,4	193,6	1,28
	DEB-1.2	730,2	126,1	151,4	126,1	145,8	1,16
	DEB-1.3	741,4	210,0	62,5	62,5	121,1	1,94
	DEB-1.4	647,1	182,5	159,6	159,6	183,0	1,15
	DEB-1.5	653,5	109,6	159,6	109,6	125,3	1,14
	DEB-1.6	498,2	362,2	294,3	294,3	309,2	1,05
	DEB-1.7	480,5	202,3	294,3	202,3	194,4	0,96
	DEB-1.8	515,8	252,9	202,1	202,1	195,3	0,97
	DEB-1.9	511,0	151,7	202,1	151,7	141,7	0,93
Média							1,17
CV							26%
Rajapakse, Degée, Mihaylov (2022)	1-OL1	3477,5	244,9	156,8	156,8	245,0	1,56
	1-OL2	3277,1	229,7	314,2	229,7	283,0	1,23
	2-OL3	3453,0	485,8	319,7	319,7	472,0	1,48
	2-OL4	3069,8	429,3	559,4	429,3	555,0	1,29
	3-OL5	3036,7	757,7	485,4	485,4	628,0	1,29
	3-OL6	2861,7	710,9	970,9	710,9	728,0	1,02
	4-OL7	2830,3	945,5	728,2	728,2	868,0	1,19
	4-OL8	2776,4	927,5	1456,3	927,5	995,0	1,07
Média							1,27
CV							15%
Lu, Lin e Yu (2012)	01	2772,6	820,2	895,6	820,2	811,0	0,99
	05	2772,6	820,2	639,7	639,7	690,0	1,08
	07	1335,9	846,4	639,7	639,7	632,0	0,99
	11	1267,3	820,2	639,7	639,7	491,0	0,77
	13	2219,0	820,2	895,6	820,2	787,0	0,96
	21	2355,3	813,4	895,6	813,4	884,0	1,09
Média							0,98
CV							12%
Média							1,16
CV							22%

Fonte: Autora.

Em geral, é possível visualizar na Tabela 21 que a força de ruína, de acordo com a ABNT NBR 9062:2017, está a favor da segurança, com uma média da relação F_{exp}/F_{calc} igual a 1,16 com coeficiente de variação de 22%.

Na estimativa da força de ruína dos espécimes de Falcón, Pallarés e Miguel (2019), a média da relação F_{exp}/F_{calc} foi de 1,17, com um coeficiente de variação igual a 26%. Contudo, as estimativas referentes aos modelos DEB-1.7, DEB-1.8 e DEB-1.9 ficaram contrárias à

segurança, sendo valores menores que 1,0. Por outro lado, a média do erro na estimativa para os modelos de Rajapakse, Degée e Mihaylov (2022) foi igual a 1,27, com um coeficiente de variação de 14%, e com relações variando de 1,07 a 1,56. Já a média obtida para os modelos de Lu, Lin e Yu (2012) foi de 0,98, com coeficiente de variação de 22%, apresentando resultados contrários à segurança.

É importante notar que o procedimento realizado é prescrito pela norma para dentes curtos, cuja razão a/d é um valor entre 0,5 e 1,0. Contudo, os modelos DEB-1.4, DEB-1.5, DEB-1.6, DEB-1.7, DEB-1.8 e DEB-1.9 de Falcón, Pallarés e Miguel (2019) e OL4, OL7 e OL8 de Rajapakse, Degée e Mihaylov (2022) possuem dentes com relação a/d superior a 1,0, logo, deveriam ser tratados como vigas em balanço. Por isso, é possível perceber que estes possuem razão F_{exp}/F_{calc} mais próxima de 1,0, com média igual a 1,08 e coeficiente de variação de 11%. Por sua vez, os dentes curtos de ambos os trabalhos de referência apresentam razão F_{exp}/F_{calc} conservadora quando comparados com os dentes longos, com média igual a 1,20 e coeficiente de variação igual a 25%.

A Tabela 22 reúne os mecanismos de falha previstos analiticamente para comparação com os experimentais. É evidente que, para as vigas ensaiadas por Falcón, Pallarés e Miguel (2019), o modelo analítico convergiu, na maioria dos casos, com os mecanismos de falha observados experimentalmente, correspondendo a uma precisão de 67%. Os ensaios foram realizados duas vezes sob as mesmas condições, com os resultados correspondentes registrados nas colunas T1 e T2. Nota-se que os espécimes DEB-1.1 e DEB-1.8 apresentaram tipos de falha distintos entre o T1 e o T2, o que implica que a previsão analítica foi compatível com apenas um deles. Além disso, os dentes DEB-1.7 e DEB-1.9 falharam devido ao escoamento da armadura de suspensão em vez do tirante, o que não correspondeu às previsões do modelo. No entanto, como mencionado anteriormente, esses dentes devem ser considerados como vigas em balanço, uma vez que não são curtos, invalidando assim a previsão do mecanismo de falha.

Quanto às vigas estudadas por Rajapakse, Degée e Mihaylov (2022), nota-se que o modelo analítico convergiu, na maioria dos casos, com os mecanismos de falha observados experimentalmente, correspondendo a uma precisão de 63%. Por outro lado, os espécimes de Lu, Lin e Yu (2012) sofreram ruína por esmagamento da biela, e, em nenhum dos casos, o modelo analítico foi capaz de prever adequadamente esse comportamento.

Tabela 22 – Mecanismos de falha analíticos segundo ABNT NBR 9062:2017 e experimentais

Referência	Modelo	Ruína		
		Analítico	Experimental	
			T1	T2
Falcón, Pallarés e Miguel (2019)	DEB-1.1	S	T	S
	DEB-1.2	T	T	T
	DEB-1.3	S	S	S
	DEB-1.4	S	S	S
	DEB-1.5	T	T	T
	DEB-1.6	C	S	S
	DEB-1.7	T	S	S
	DEB-1.8	S	S	T
	DEB-1.9	T	S	S
Rajapakse, Degée e Mihaylov (2022)	1-OL1	S	S	-
	1-OL2	T	T	-
	2-OL3	S	S	-
	2-OL4	T	S	-
	3-OL5	S	S	-
	3-OL6	T	S	-
	4-OL7	S	S	-
	4-OL8	T	S	-
Lu, Lin e Yu (2012)	01	T	C	-
	05	S	C	-
	07	S	C	-
	11	S	C	-
	13	T	C	-
	21	T	C	-

T – Ruína por flexão ou escoamento da armadura do tirante; S – Ruína por escoamento da armadura de suspensão; C – Ruína por compressão (esmagamento da biela).

Fonte: Autora

De maneira geral, os mecanismos de falha dos dentes de concreto analisados foram satisfatoriamente previstos pelas normas brasileiras ABNT NBR 9062:2017 e ABNT NBR 6118:2023, exceto nos casos em que a falha ocorreu por esmagamento da biela. Em média, a previsão do mecanismo de falha coincidiu com os resultados experimentais em 47% dos dentes analisados.

4.2 El Debs (2017)

Segundo El Debs (2017), no processo de dimensionamento de um dente de concreto, é crucial determinar a armadura do tirante e a armadura de suspensão. Além disso, é fundamental

realizar uma verificação da tensão de compressão para evitar a ruptura do concreto. Portanto, as expressões analíticas utilizadas na estimativa da força de ruína derivam desses procedimentos.

Quanto à tensão de compressão para evitar a ruptura do concreto, tem-se que a tensão solicitante e a tensão resistente são respectivamente:

$$\tau_{wd} = \frac{F}{b \cdot d} \quad (65)$$

$$\tau_{wu} = \frac{0,18 \cdot f_c}{\sqrt{0,9^2 + \left(\frac{a}{d}\right)^2}} < 0,17 f_c \quad (66)$$

A força de ruína por ruptura do concreto pode ser calculada ao assumir que a tensão solicitante é igual à tensão última. Assim, ao isolar a força vertical, encontra-se a equação da força de ruína:

$$F_{r,c} = \frac{0,18 \cdot f_c}{\sqrt{0,9^2 + \left(\frac{a}{d}\right)^2}} b \cdot d \quad (67)$$

Em que a é a distância entre o ponto de aplicação da força e o CG da armadura de suspensão, d a altura útil do dente de concreto, b é a largura do dente e f_c é a resistência característica à compressão do concreto.

Quanto à força de ruína por escoamento da armadura do tirante, é possível calculá-la ao isolar F na Equação (25), de maneira que:

$$F_{r,tir} = 0,85 \frac{d}{a} (A_{s,tir} f_{y,tir} - 1,2H) \quad (68)$$

Sendo $A_{s,tir}$ a área de aço da armadura do tirante, $f_{y,tir}$ a resistência ao escoamento da armadura do tirante e H a força horizontal.

E, por último, assim como de acordo com a ABNT NBR 9062:2017, é possível calcular a força de ruína por escoamento da armadura de suspensão conforme Equação (64) apresentada anteriormente.

A força de ruína que dita a capacidade resistente dos dentes de concreto curtos, de acordo com El Debs (2017), é o menor valor entre os encontrados através das Equações (64), (67) e (68).

Os resultados analíticos para a força de ruína para os dentes analisados de acordo com El Debs (2017) estão apresentados na Tabela 23. Além disso, uma comparação entre os resultados analíticos e os experimentais.

Tabela 23 – Comparação entre as forças de ruína experimentais e analíticas de acordo com El Debs (2017)

Referência	Modelo	F_{rc} (kN)	$F_{r,tir}$ (kN)	$F_{r,susp}$ (kN)	F_{calc} (kN)	F_{exp} (kN)	F_{exp}/F_{calc}
Falcón, Pallarés e Miguel (2019)	DEB-1.1	351,4	197,1	151,4	151,4	193,6	1,28
	DEB-1.2	336,0	118,4	151,4	118,4	145,8	1,23
	DEB-1.3	341,1	197,1	62,5	62,5	121,1	1,94
	DEB-1.4	316,3	169,0	159,6	159,6	183,0	1,15
	DEB-1.5	319,5	101,5	159,6	101,5	125,3	1,23
	DEB-1.6	243,5	335,4	294,3	243,5	309,2	1,27
	DEB-1.7	234,9	187,3	294,3	187,3	194,4	1,04
	DEB-1.8	252,1	234,2	202,1	202,1	195,3	0,97
	DEB-1.9	249,8	140,5	202,1	140,5	141,7	1,01
						Média	1,23
						CV	23%
Rajapakse, Degée, Mihaylov (2022)	1-OL1	1299,5	231,5	156,8	156,8	245,0	1,56
	1-OL2	1253,3	215,7	314,2	215,7	283,0	1,31
	2-OL3	1290,4	459,3	319,7	319,7	472,0	1,48
	2-OL4	1200,4	400,6	559,4	400,6	555,0	1,39
	3-OL5	1134,8	716,3	485,4	485,4	628,0	1,29
	3-OL6	1094,4	667,4	970,9	667,4	728,0	1,09
	4-OL7	1106,8	882,3	728,2	728,2	868,0	1,19
	4-OL8	1093,6	863,9	1456,3	863,9	995,0	1,15
						Média	1,31
						CV	12%
Lu, Lin e Yu (2012)	01	587,0	807,5	895,6	587,0	811,0	1,38
	05	587,0	807,5	639,7	587,0	690,0	1,18
	07	288,0	837,5	639,7	288,0	632,0	2,19
	11	268,3	807,5	639,7	268,3	491,0	1,83
	13	469,8	807,5	895,6	469,8	787,0	1,68
	21	668,5	799,8	895,6	668,5	884,0	1,32
						Média	1,60
						CV	24%
						Média	1,35
						CV	23%

Fonte: Autora

É possível observar na Tabela 23 que a força de ruína segundo El Debs (2017) está a favor da segurança, com uma média da relação F_{exp}/F_{calc} igual a 1,35 com coeficiente de variação de 23%. A principal diferença entre os resultados obtidos neste modelo com relação aos da ABNT NBR 9062:2017 ocorre na armadura do tirante, uma vez que a força resistente da armadura no tirante calculada pela norma é um pouco maior.

Além disso, ao contrário do que ocorreu com a ABNT NBR 9062:2017, o modelo de El Debs (2017), embora conservador na estimativa das forças últimas dos espécimes de Lu, Lin e Yu (2012), conseguiu prever corretamente o mecanismo de falha desses espécimes, uma vez que a menor força correspondia à ruína por compressão.

A Tabela 24 reúne os mecanismos de falha previstos analiticamente para comparação com os experimentais.

Tabela 24 – Mecanismos de falha analíticos segundo El Debs (2017) e experimentais

Referência	Modelo	Ruína		
		Analítico	Experimental	
			T1	T2
Falcón, Pallarés e Miguel (2019)	DEB-1.1	S	T	S
	DEB-1.2	T	T	T
	DEB-1.3	S	S	S
	DEB-1.4	S	S	S
	DEB-1.5	T	T	T
	DEB-1.6	C	S	S
	DEB-1.7	T	S	S
	DEB-1.8	S	S	T
	DEB-1.9	T	S	S
Rajapakse, Degée, Mihaylov (2022)	1-OL1	S	S	-
	1-OL2	T	T	-
	2-OL3	S	S	-
	2-OL4	T	S	-
	3-OL5	S	S	-
	3-OL6	T	S	-
	4-OL7	S	S	-
	4-OL8	T	S	-
Lu, Lin e Yu (2012)	01	C	C	-
	05	C	C	-
	07	C	C	-
	11	C	C	-
	13	C	C	-
	21	C	C	-

T – Ruína por flexão ou escoamento da armadura do tirante; S – Ruína por escoamento da armadura de suspensão; C – Ruína por compressão (esmagamento da biela).

Fonte: Autora

Observa-se que, para os espécimes de Falcón, Palláres e Miguel (2019) e de Rajapakse, Degée e Mihaylov (2022), os mecanismos de ruptura decorrentes do modelo analítico de El Debs (2017) se assemelham aos encontrados segundo as normas ABNT NBR 6118:2023 e ABNT NBR 9062:2017. Uma exceção notável é o espécime DEB-1.6 de Falcón, Pallarés e Miguel (2019), no qual a falha prevista no modelo analítico ocorre pela ruptura do concreto na área do dente, em contraste com o resultado experimental, que ocorre devido à deformação excessiva da armadura de suspensão. Além disso, como dito anteriormente, o modelo acertou 100% dos mecanismos de ruptura dos modelos de Lu, Lin e Yu (2012).

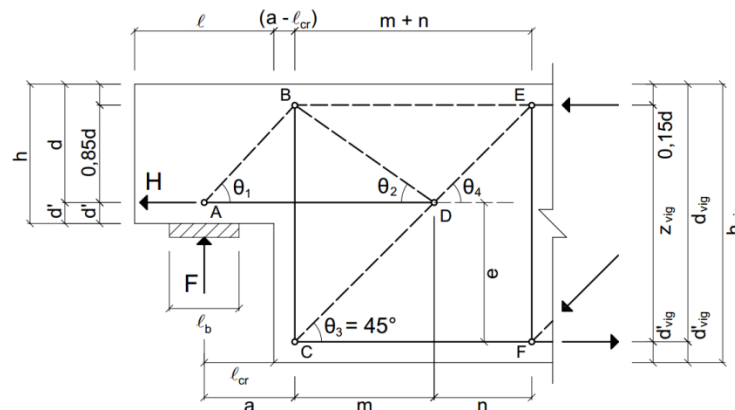
Assim, os mecanismos de falha observados nos dentes de concreto analisados pelo modelo analítico de El Debs (2017) corresponderam a 66% de concordância com os experimentais.

4.3 ACI 318:2019

A norma ACI 318:2019 sugere a utilização do modelo de bielas e tirantes para o projeto de dentes de concreto, sem, no entanto, detalhar um modelo específico em seu código normativo. Contudo, a norma faz referência aos exemplos de projeto contidos na ACI SP-208.

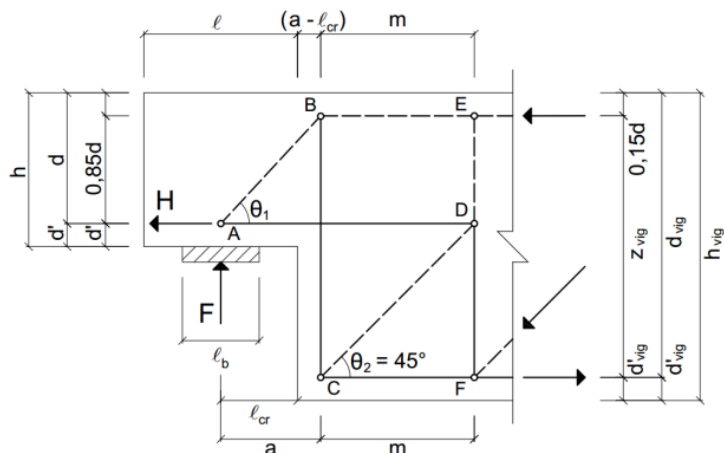
Sanders (2002) apresenta um exemplo de projeto de dente de concreto neste manual normativo, no qual são recomendados dois modelos de bielas e tirantes. O primeiro modelo proposto por Sanders (2002) é aquele desenvolvido por Cook e Mitchell (1988) (Figura 47) e posteriormente contestado por Mattock (2012). O segundo modelo trata-se de um modelo alternativo para o projeto de dente de concreto (Figura 48).

Figura 47 – Parâmetros geométricos do Modelo I



Fonte: Silva (2017) adaptado de Cook e Mitchell (1988) e Sanders (2002)

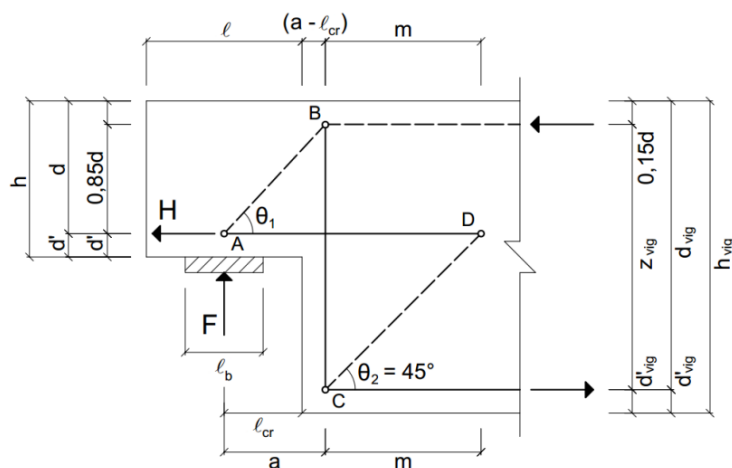
Figura 48 – Parâmetros geométricos do Modelo II



Fonte: Silva (2017) adaptado de FIP (1999) e Sanders (2002)

Mattock (2012) propôs uma versão simplificada do modelo de bielas e tirantes da Figura 48. Essa versão (Figura 49) é notavelmente semelhante ao Modelo II, distinguindo-se apenas pela ausência da biela DE e do tirante DF. Por isso, as expressões para a força de ruína são idênticas para ambos os modelos devido à sua semelhança.

Figura 49 – Parâmetros geométricos do Modelo III



Fonte: Silva (2017) adaptado de Mattock (2012)

Silva (2017) realizou uma análise comparativa entre os Modelos I, II e III para estimativa da força de ruína de dentes de concreto. Ele observou que os Modelos II e III estimam com maior precisão a força de ruína, principalmente quando esta é derivada da ruptura do concreto ou do escoamento da armadura de suspensão. Em suma, Silva (2017) constatou que os Modelos II e III são os mais apropriados para o projeto de dentes de concreto. Por isso, neste

trabalho, serão calculadas as forças de ruína analíticas segundo a ACI 318:2019 de acordo com os Modelos II e III.

Nos modelos, a falha por ruptura do concreto na região do dente pode ocorrer devido à biela AB. Assim, a força de ruína do dente de concreto está restrita pela resistência da biela AB. Conforme especificado na ACI 318:2019, a resistência da biela localizada em região sem armadura é definida por:

$$F_{ns,AB} = f_{ce} A_{cs,AB} \quad (69)$$

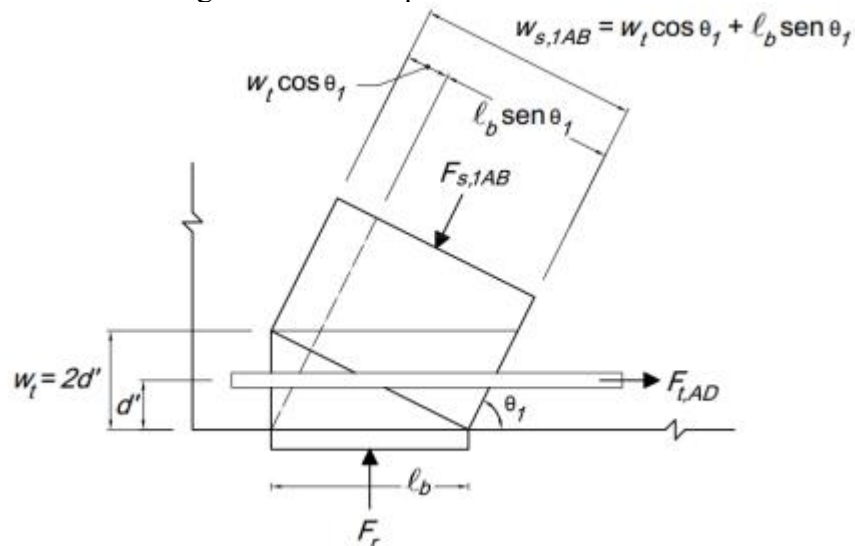
$$f_{ce} = 0,85 \beta_c \beta_s f_c \quad (70)$$

Sendo f_{ce} a resistência à compressão efetiva do concreto; f_c a resistência característica à compressão do concreto; β_s o coeficiente da biela, igual a 0,75; β_c o fator de modificação de confinamento biela-nó, igual a 1,0. A área da seção transversal da biela $A_{cs,AB}$ depende da região nodal. Assim, para o nó A (Figura 50), sendo b_d a largura do dente e $w_{s,1AB}$ a largura da biela, tem-se que a área da seção transversal da biela pode ser calculada por:

$$A_{cs,1AB} = w_{s,1AB} b_d \quad (71)$$

$$w_{s,1AB} = w_t \cos(\theta_1) + l_b \sin(\theta_1) \quad (72)$$

Figura 50 – Nó A para Modelos II e III



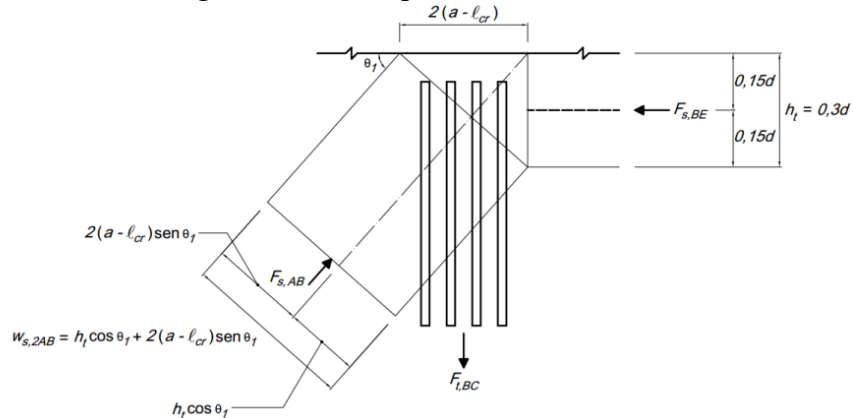
Fonte: Silva (2017) adaptado de ACI 318:2019

Para o nó B, ilustrado na Figura 51, a área da seção transversal da biela AB pode ser calculada por:

$$A_{CS,2AB} = w_{s,2AB} b_d \quad (73)$$

$$w_{s,2AB} = h_t \cos(\theta_1) + 2(a - l_{cr}) \text{sen}(\theta_1) \quad (74)$$

Figura 51 – Nó B para Modelos II e III



Fonte: Silva (2017) adaptado de ACI 318:2019

Considerando a resistência da biela AB e equilibrando o nó A, a força de ruína por ruptura do concreto na região do dente, denotada como $F_{r,bieAB}$, é determinada como o menor valor entre $F_{r1,bieAB}$ e $F_{r2,bieAB}$, conforme estabelecido pelas expressões:

$$F_{r1,bieAB} = F_{ns1,AB} \text{sen}(\theta_1) \quad (75)$$

$$F_{r2,bieAB} = F_{ns2,AB} \text{sen}(\theta_1) \quad (76)$$

$$\theta_1 = \arctg(0,85d/a) \quad (77)$$

Outra possibilidade de falha é a ruína por flexão devido ao escoamento da armadura do tirante. Por isso, limita-se a força de ruína pela resistência do tirante AD. Desprezando a parcela referente à protensão, tem-se que a resistência do tirante AD pode ser calculada por:

$$F_{nt,tirAD} = A_{s,tir} f_{y,tir} \quad (78)$$

Em que $f_{y,tir}$ é a resistência ao escoamento do aço do tirante e $A_{s,tir}$ a área de aço da armadura do tirante.

Ao equilibrar o nó A, tem-se que a força de ruína por escoamento da armadura principal por ser determinada por:

$$F_{r,tirAD} = (F_{nt,tirAD} - H) \cdot tg(\theta_1) \quad (79)$$

Sendo H a força horizontal.

Além disso, a resistência do tirante BC deve ser suficiente para evitar as fissuras que surgem no canto reentrante e o escoamento da armadura de suspensão que podem levar o dente de concreto à ruína. A resistência do tirante BC, ignorando a parcela referente à protensão, pode ser calculada por:

$$F_{nt,tirBC} = A_{s,susp} f_{y,susp} \quad (80)$$

Sendo $A_{s,susp}$ a área de aço da armadura de suspensão; $f_{y,susp}$ a resistência característica ao escoamento do aço da armadura de suspensão.

Assim, a força de ruína devido ao escoamento da armadura de suspensão pode ser determinada por:

$$F_{r,suspBC} = F_{nt,tirBC} \quad (81)$$

Por fim, deve-se verificar a força de ruína por ruptura do concreto na extremidade inferior da viga, no nó C. Essa força é limitada pela resistência da biela CD que, conforme ACI 318:2019, pode ser calculada por:

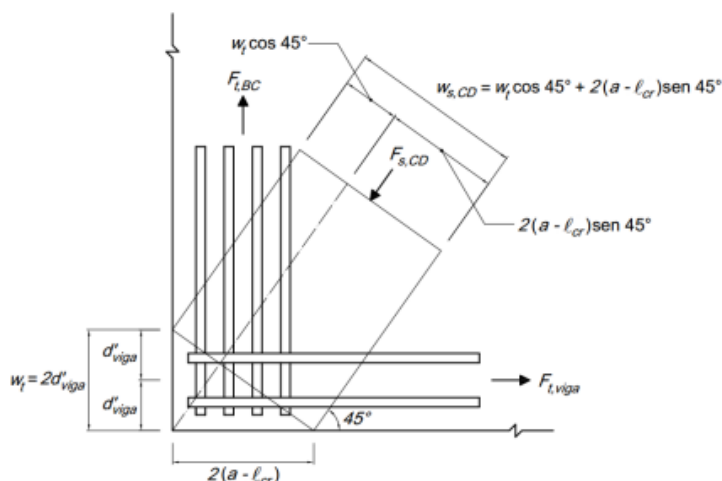
$$F_{ns,CD} = f_{ce} A_{cs,CD} \quad (82)$$

Sendo f_{ce} a resistência à compressão efetiva do concreto, apresentada na Equação (70). Para o nó C, sendo b_d a largura do dente e $w_{s,CD}$ a largura da biela, tem-se que a área da seção transversal da biela pode ser calculada por:

$$A_{cs,CD} = w_{s,CD} b_d \quad (83)$$

$$w_{s,CD} = w_t \cos(\theta_2) + 2(a - l_{cr}) \sen(\theta_2) \quad (84)$$

Figura 52 – Nó C para Modelos II e III



Fonte: Silva (2017) adaptado de ACI 318:2019

Assim, a força de ruína por ruptura do concreto na extremidade inferior da viga pode ser determinada por:

$$F_{r,bieCD} = F_{ns,CD} \text{sen}(\theta_2) \quad (85)$$

A força de ruína que dita a capacidade resistente dos dentes de concreto curtos, de acordo com o ACI 318:2019 e os Modelos II e III, é o menor valor entre os encontrados através das Equações (75), (76), (79), (81) e (85).

Os resultados analíticos para a força de ruína para os dentes analisados de acordo com ACI 318:2019 estão apresentados na Tabela 25.

É possível visualizar na Tabela 25 que a força de ruína, segundo a ACI 318:2019, está a favor da segurança, com uma média geral da relação F_{exp}/F_{calc} igual a 1,25 com coeficiente de variação de 19%.

Na estimativa da força de ruína dos espécimes de Falcón, Pallarés e Miguel (2019), a média da relação F_{exp}/F_{calc} foi de 1,21, com um coeficiente de variação igual a 24%. A única estimativa que resultou em uma relação menor que 1,0 e, portanto, contrária à segurança, foi a referente ao espécime DEB-1.8, cuja relação foi de 0,97. Por sua vez, a média do erro na estimativa para os modelos de Rajapakse, Degée e Mihaylov (2022) foi igual a 1,31, com um coeficiente de variação de 12%, e com relações variando de 1,09 a 1,56. Por fim, a média F_{exp}/F_{calc} para os espécimes de Lu, Lin e Yu (2012) foi de 1,23 com coeficiente de variação de 18%.

Tabela 25 – Comparação entre as forças de ruína experimentais e analíticas de acordo com ACI 318:2019

Referência	Modelo	$F_{r1,bieAB}$ (kN)	$F_{r2,bieAB}$ (kN)	$F_{r,tirAD}$ (kN)	$F_{r,suspBC}$ (kN)	$F_{r,bieCD}$ (kN)	F_{calc} (kN)	F_{exp} (kN)	F_{exp}/F_{calc}
Falcón, Pallarés e Miguel (2019)	DEB-1.1	756,9	474,1	197,1	151,4	471,6	151,4	193,6	1,28
	DEB-1.2	723,7	453,3	118,4	151,4	451,0	118,4	145,8	1,23
	DEB-1.3	734,8	460,3	197,1	62,5	457,9	62,5	121,1	1,94
	DEB-1.4	663,0	609,1	169,0	159,6	669,6	159,6	183,0	1,15
	DEB-1.5	669,6	615,1	101,5	159,6	676,3	101,5	125,3	1,23
	DEB-1.6	510,4	468,9	335,4	294,3	515,5	294,3	309,2	1,05
	DEB-1.7	492,4	452,3	187,3	294,3	497,3	187,3	194,4	1,04
	DEB-1.8	528,5	485,4	234,2	202,1	533,7	202,1	195,3	0,97
	DEB-1.9	523,5	480,9	140,5	202,1	528,7	140,5	141,7	1,01
Média								1,21	
CV								24%	
Rajapakse, Degée, Mihaylov (2022)	1-OL1	1840,2	1960,0	231,5	156,8	1318,0	156,8	245,0	1,56
	1-OL2	1747,7	2210,5	215,7	314,2	1622,2	215,7	283,0	1,31
	2-OL3	1827,3	1946,2	459,3	319,7	1308,8	319,7	472,0	1,48
	2-OL4	1648,1	2397,9	400,6	559,4	1912,8	400,6	555,0	1,39
	3-OL5	1607,0	1711,6	716,3	485,4	1151,0	485,4	628,0	1,29
	3-OL6	1526,2	1930,3	667,4	970,9	1416,6	667,4	728,0	1,09
	4-OL7	1519,6	2210,9	882,3	728,2	1763,6	728,2	868,0	1,19
	4-OL8	1493,7	2265,0	863,9	1456,3	1856,4	863,9	995,0	1,15
Média								1,31	
CV								12%	
Lu, Lin e Yu (2012)	01	954,3	1313,6	807,5	895,6	822,7	807,5	811,0	1,00
	05	954,3	1313,6	807,5	639,7	822,7	639,7	690,0	1,08
	07	450,6	629,9	837,5	639,7	384,6	384,6	632,0	1,64
	11	436,2	600,5	807,5	639,7	376,1	376,1	491,0	1,31
	13	763,8	1051,3	807,5	895,6	658,4	658,4	787,0	1,20
	21	761,7	1812,0	799,8	895,6	1066,6	761,7	884,0	1,16
Média								1,23	
CV								18%	
Média								1,25	
CV								19%	

Fonte: Autora

A Tabela 26 reúne os mecanismos de falha previstos analiticamente para comparação com os experimentais.

Observa-se que os mecanismos de ruptura previstos pelo modelo analítico da norma ACI 318:2019 são idênticos aos observados nas normas ABNT NBR 6118:2023 e ABNT NBR 9062:2017, com a ressalva de que o modelo foi capaz de prever satisfatoriamente o mecanismo

de ruptura de 67% dos espécimes de Lu, Lin e Yu (2012). Assim, o modelo analítico da ACI 318:2019 mostrou-se eficaz na previsão dos mecanismos de falha observados nos dentes de concreto analisados, com uma taxa de acerto de 66% dos casos.

Tabela 26 – Mecanismos de falha analíticos segundo ACI 318:2019 e experimentais

Referência	Modelo	Analítico	Ruína	
			Experimental	
			T1	T2
Falcón, Pallarés e Miguel (2019)	DEB-1.1	S	T	S
	DEB-1.2	T	T	T
	DEB-1.3	S	S	S
	DEB-1.4	S	S	S
	DEB-1.5	T	T	T
	DEB-1.6	S	S	S
	DEB-1.7	T	S	S
	DEB-1.8	S	S	T
	DEB-1.9	T	S	S
Rajapakse, Degée, Mihaylov (2022)	1-OL1	S	S	-
	1-OL2	T	T	-
	2-OL3	S	S	-
	2-OL4	T	S	-
	3-OL5	S	S	-
	3-OL6	T	S	-
	4-OL7	S	S	-
	4-OL8	T	S	-
Lu, Lin e Yu (2012)	01	T	C	-
	05	S	C	-
	07	C	C	-
	11	C	C	-
	13	C	C	-
	21	C	C	-

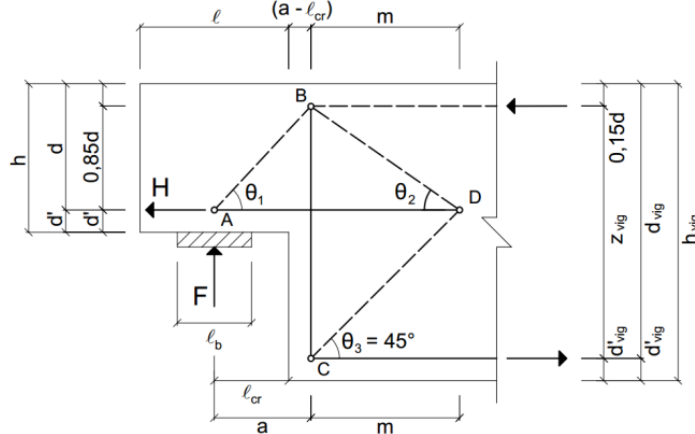
T – Ruína por flexão ou escoamento da armadura do tirante; S – Ruína por escoamento da armadura de suspensão; C – Ruína por compressão (esmagamento da biela).

Fonte: Autora

4.4 EN 1992-1-1:2010

O EN 1992-1-1:2010 também preconiza a utilização do modelo de bielas e tirantes para o dimensionamento de dentes de concreto. O modelo de bielas e tirantes utilizado é o presente nos exemplos de projeto da European Concrete Platform ASBL (2008). Esse modelo, denominado de Modelo IV, está ilustrado na Figura 53.

Figura 53 – Parâmetros geométricos do Modelo IV



Fonte: Silva (2017) adaptado de European Concrete Platform ASBL (2008)

Conforme o Modelo IV, a falha devido à ruptura do concreto na região do dente pode ocorrer pela biela AB, exigindo duas verificações: uma para o nó A e outra para o nó B. Em ambos os casos, a força de ruína do dente de concreto é restrita pela resistência da biela AB. De acordo com a NP EN 1992-1-1:2010, a resistência da biela AB é determinada por:

$$\sigma_{R,AB} = 0,6v f_c \quad (86)$$

$$v = 1 - \frac{f_c}{250} \quad (87)$$

Sendo f_c a resistência característica à compressão do concreto, em MPa.

Ao levar em conta a resistência da biela AB e realizar o equilíbrio no nó A, a força de ruína devido à ruptura do concreto na região do dente, $F_{r,bieAB}$, é determinada como o valor mínimo entre $F_{r1,bieAB}$ e $F_{r2,bieAB}$, estabelecidos por:

$$F_{r1,bieAB} = \sigma_{r,AB} \cdot A_{1,bieAB} \cdot \text{sen}(\theta_1) \quad (88)$$

$$F_{r2,bieAB} = \sigma_{r,AB} \cdot A_{2,bieAB} \cdot \text{sen}(\theta_1) \quad (89)$$

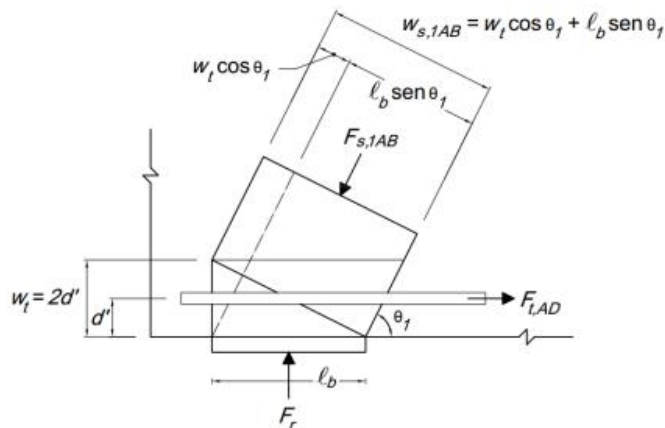
A área da seção transversal da biela AB depende da configuração da região nodal. Visto isso, as áreas obtidas respectivamente para o nó A (Figura 54) e para o B (Figura 55) são:

$$A_{1,bieAB} = w_{s,1AB} \cdot b_d \quad (90)$$

$$A_{2,bieAB} = w_{s,2AB} \cdot b_d \quad (91)$$

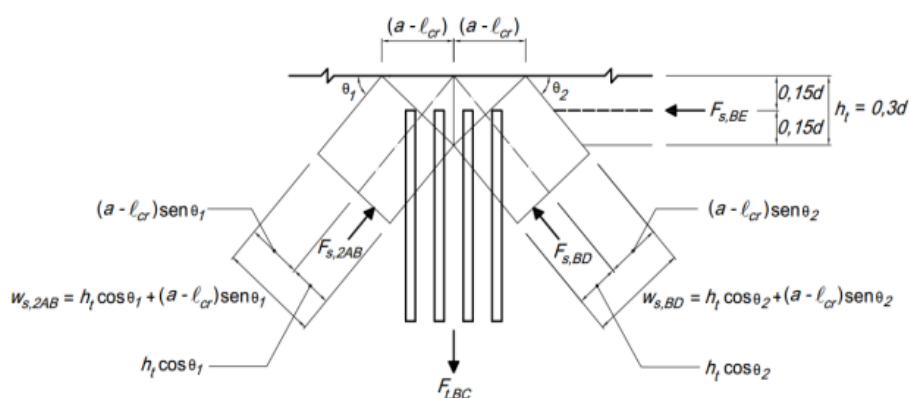
Onde $w_{s,1AB}$ e $w_{s,2A}$ são a largura da biela inclinada do nó A e do nó B respectivamente.

Figura 54 – Nó A para Modelo IV



Fonte: Silva (2017) adaptado de ACI 318:2014

Figura 55 – Nó B para Modelo IV



Fonte: Silva (2017) adaptado de ACI 318:2014

A falha no dente de concreto pode ocorrer também pelo escoamento da armadura do tirante. Portanto, de acordo com o Modelo IV, a força de ruína é restrita pela resistência do tirante AD. Conforme estipulado pela NP EN 1992-1-1:2010, a resistência do tirante AD pode ser expressa por:

$$F_{tir,AD} = A_{s,tir} \cdot f_{y,tir} \quad (92)$$

Em que $A_{s,tir}$ é a área de aço do tirante e $f_{y,tir}$ é a resistência característica ao escoamento do aço do tirante. Assim, ao equilibrar o nó A, é possível obter que a força de ruína por escoamento da armadura do tirante é:

$$F_{r,tirAD} = (F_{tir,AD} - H) \cdot tg(\theta_1) \quad (93)$$

O escoamento da armadura de suspensão pode desencadear a ruína do dente de concreto. Nesse contexto, conforme Modelo IV, a força de ruína é restrita pela resistência do tirante BC. Esta pode ser calculada por:

$$F_{tir,BC} = A_{s,susp} \cdot f_{y,susp} \quad (94)$$

Assim, de acordo com a NP EN 1992-1-1:2010, a resistência da suspensão é definida por:

$$F_{r,suspBC} = \frac{F_{tir,BC} [\text{sen}(\theta_2 + \cos(\theta_2))] - H \cdot \text{sen}(\theta_2)}{\text{sen}(\theta_2) + \cos(\theta_2) + \cotg(\theta_1) \text{sen}(\theta_2)} \quad (95)$$

$$\theta_2 = \text{arctg} \left(\frac{0,85d}{m} \right) \quad (96)$$

No nó C, existe a possibilidade de ruína devido à ruptura do concreto na extremidade inferior da viga, pela biela CD. Nesse sentido, a força de ruína é limitada pela resistência da biela CD. Conforme especificado pela NP EN 1992-1-1:2010, a resistência da biela CD é definida de maneira semelhante à resistência da biela AB, utilizando as Equações (86) e (87). A partir da configuração do nó C (Figura 52), a área da seção transversal da biela CD pode ser determinada pelas Equações (83) e (84).

Ao equilibrar o nó D, tem-se que a força de ruína por ruptura do concreto na extremidade inferior da viga pode ser obtida por:

$$F_{r,bieCD} = \frac{\sigma_{r,CD} A_{cs,CD} [\text{sen}(\theta_2) + \cos(\theta_2)] - \sqrt{2} H \text{sen}(\theta_2)}{\sqrt{2} \cotg(\theta_1) \text{sen}(\theta_2)} \quad (97)$$

A força de ruína que dita a capacidade resistente dos dentes de concreto curtos, de acordo com o NP EN 1992-1-1:2010 e o Modelo IV, é o menor valor entre os encontrados através das Equações (88), (89), (93), (95) e (97).

Os resultados analíticos para a força de ruína para os dentes curtos analisados de acordo com o NP EN 1992-1-1:2010 e o Modelo IV estão apresentados na Tabela 27.

Tabela 27 – Comparação entre as forças de ruína experimentais e analíticas de acordo com NP EN 1992-1-1:2010

Referência	Modelo	$F_{r1,bieAB}$ (kN)	$F_{r2,bieAB}$ (kN)	$F_{r,tirAD}$ (kN)	$F_{r,suspBC}$ (kN)	$F_{r,bieCD}$ (kN)	F_{calc} (kN)	F_{exp} (kN)	F_{exp}/F_{calc}
Falcón, Pallarés e Miguel (2019)	DEB-1.1	595,3	282,3	197,1	103,1	990,0	103,1	193,6	1,88
	DEB-1.2	574,1	272,3	118,4	103,1	954,8	103,1	145,8	1,41
	DEB-1.3	581,2	275,6	197,1	42,6	966,7	42,6	121,1	2,84
	DEB-1.4	523,2	332,0	169,0	103,2	1208,9	103,2	183,0	1,77
	DEB-1.5	527,4	334,7	101,5	103,2	1218,6	101,5	125,3	1,23
	DEB-1.6	420,6	267,0	335,4	190,3	971,9	190,3	309,2	1,62
	DEB-1.7	407,8	258,8	187,3	190,3	942,3	187,3	194,4	1,04
	DEB-1.8	433,3	275,0	234,2	130,7	1001,3	130,7	195,3	1,49
	DEB-1.9	429,9	272,8	140,5	130,7	993,3	130,7	141,7	1,08
Média								1,60	
CV								34%	
Rajapakse, Degée, Mihaylov (2022)	1-OL1	1338,5	1030,5	231,5	107,0	2773,0	107,0	245,0	2,29
	1-OL2	1271,2	1119,7	215,7	209,5	3137,7	209,5	283,0	1,35
	2-OL3	1331,8	1025,3	459,3	218,1	2759,2	218,1	472,0	2,16
	2-OL4	1205,0	1185,0	400,6	364,8	3438,5	364,8	555,0	1,52
	3-OL5	1220,3	933,4	716,3	331,3	2511,8	331,3	628,0	1,90
	3-OL6	1151,4	1014,2	667,4	647,5	2842,0	647,5	728,0	1,12
	4-OL7	1132,7	1117,4	882,3	474,8	3242,3	474,8	868,0	1,83
	4-OL8	1113,4	1136,4	863,9	942,7	3333,5	863,9	995,0	1,15
Média								1,67	
CV								27%	
Lu, Lin e Yu (2012)	01	680,4	585,4	807,5	677,7	2638,4	585,4	811,0	1,39
	05	680,4	585,4	807,5	484,1	2638,4	484,1	690,0	1,43
	07	377,1	329,5	837,5	483,7	1443,5	329,5	632,0	1,92
	11	365,1	314,1	807,5	484,1	1415,5	314,1	491,0	1,56
	13	579,4	498,5	807,5	677,7	2246,5	498,5	787,0	1,58
	21	577,8	830,0	799,8	605,5	2315,7	577,8	884,0	1,53
Média								1,57	
CV								12%	
Média								1,61	
CV								27%	

Fonte: Autora

É possível visualizar na Tabela 27 que a força de ruína segundo EN 1992-1-1:2010 está a favor da segurança, com uma média da relação F_{exp}/F_{calc} igual a 1,61 com coeficiente de variação de 27%. Na estimativa da força de ruína dos espécimes de Falcón, Pallarés e Miguel (2019), a média da relação F_{exp}/F_{calc} foi de 1,60, com um coeficiente de variação igual a 34%, e com relações variando de 1,04 a 2,84. Por sua vez, a média do erro na estimativa para os

modelos de Rajapakse, Degée e Mihaylov (2022) foi igual a 1,67, com um coeficiente de variação de 27%, e com relações variando de 1,12 a 2,29. Para os espécimes de Lu, Lin e Yu (2012), a média obtida da razão F_{exp}/F_{calc} foi de 1,57, com um coeficiente de variação igual a 12%.

Portanto, torna-se evidente que as prescrições da NP EN 1992-1-1:2010, a partir do Modelo IV, têm a capacidade de determinar a força de ruína, porém, de maneira excessivamente conservadora, chegando a subestimar a resistência do dente.

A Tabela 28 reúne os mecanismos de falha previstos analiticamente para comparação com os experimentais.

Tabela 28 – Mecanismos de falha analíticos segundo EN 1992-1-1:2010 e experimentais

Referência	Modelo	Ruína		
		Analítico	Experimental	
			T1	T2
Falcón, Pallarés e Miguel (2019)	DEB-1.1	S	T	S
	DEB-1.2	S	T	T
	DEB-1.3	S	S	S
	DEB-1.4	S	S	S
	DEB-1.5	T	T	T
	DEB-1.6	S	S	S
	DEB-1.7	T	S	S
	DEB-1.8	S	S	T
	DEB-1.9	S	S	S
Rajapakse, Degée, Mihaylov (2022)	1-OL1	S	S	-
	1-OL2	S	T	-
	2-OL3	S	S	-
	2-OL4	S	S	-
	3-OL5	S	S	-
	3-OL6	S	S	-
	4-OL7	S	S	-
	4-OL8	T	S	-
Lu, Lin e Yu (2012)	01	C	C	-
	05	S	C	-
	07	C	C	-
	11	C	C	-
	13	C	C	-
	21	C	C	-

T – Ruína por flexão ou escoamento da armadura do tirante; S – Ruína por escoamento da armadura de suspensão; C – Ruína por compressão (esmagamento da biela).

Fonte: Autora

Os mecanismos de falha previstos pela EN 1992-1-1:2010, utilizando o Modelo IV, apresentaram uma taxa de concordância de 72% com os resultados experimentais. Para os dentes de Falcón, Pallarés e Miguel (2019), essa taxa foi de 67%, enquanto para os de Rajapakse, Degée e Mihaylov (2022), foi de 75%. Por outro lado, para os espécimes de Lu, Lin e Yu (2012), a taxa de concordância foi de 83%.

4.5 Análise comparativa entre os resultados experimentais, numéricos e analíticos

Os resultados da força última provenientes dos modelos analíticos e das simulações numéricas para os experimentos realizados por Falcón, Pallarés e Miguel (2019), por Rajapakse, Degée, Mihaylov (2022) e Lu, Lin e Yu (2012) estão reunidos na Tabela 29. Os resultados são apresentados na forma da relação F_{exp}/F_{calc} , onde F_{exp} é a força última experimental no apoio esquerdo da viga e F_{calc} é a força de reação obtida pelo modelo.

Tabela 29 – Média e coeficiente de variação da relação F_{exp}/F_{calc} para cada procedimento de cálculo

Processo de cálculo	Média F_{exp}/F_{calc}	CV
Modelo numérico (sem correção)	1,23	31%
Modelo numérico (corrigido)	1,00	14%
ABNT NBR 9062:2017 e ABNT NBR 6118:2023	1,16	22%
El Debs (2017)	1,35	23%
ACI 318:2019 – Modelos II e III	1,25	19%
NP EN 1992-1-1:2010 – Modelo IV	1,61	27%

Fonte: Autora

Observa-se que as estimativas mais precisas em relação aos resultados experimentais, em termos de força última, foram obtidas pela estratégia de modelagem proposta, ao aplicar o fator de correção. Analiticamente, os resultados mais precisos foram alcançados utilizando os critérios de projeto das normas ABNT NBR 9062:2017 e ABNT NBR 6118:2023. De forma alternativa, estimativas ligeiramente mais conservadoras, mas ainda coerentes, foram fornecidas pelas diretrizes normativas da ACI 318:2019, ao adotar os Modelos II e III, e por El Debs (2017). A força de ruína também pode ser determinada conforme os requisitos da NP EN 1992-1-1:2010, utilizando o Modelo IV. No entanto, é importante ressaltar que, embora conservadora, essa estimativa tende a subestimar a capacidade resistente dos dentes. Esses resultados analíticos estão alinhados com os alcançados por Silva (2017) na mesma análise.

Para avaliar os modelos em termos de previsão do mecanismo de ruptura, os resultados da relação F_{exp}/F_{calc} para cada mecanismo de ruína estudada foram reunidos e apresentados na Tabela 30. Para a análise da ruína por flexão (T), foram considerados 6 dentes, sendo eles os DEB-: 1.1 (T1), 1.2 (T1 e T2), 1.5 (T1), 1.8 (T2) de Falcón, Pallarés e Miguel (2019) e o OL2 de Rajapakse, Degée, Mihaylov (2022). Para a análise dos dentes que sofreram ruína por escoamento da armadura de suspensão (S), foram considerados 18 dentes, sendo eles os DEB-: 1.3 (T1 e T2), 1.4 (T1 e T2), 1.6 (T1 e T2), 1.7 (T1 e T2), 1.8 (T1), 1.9 (T1 e T2) de Falcón, Pallarés e Miguel (2019) e os OL1, OL3, OL4, OL5, OL6, OL7 e OL8 de Rajapakse, Degée, Mihaylov (2022). Por fim, para a análise da ruína por esmagamento da biela na região do dente (C), foram considerados 6 dentes, sendo eles os 01, 05, 07, 11, 13 e 21 de Lu, Lin e Yu (2012).

Tabela 30 – Resultados de F_{exp}/F_{calc} de acordo com os mecanismos de falha do dente de concreto

Mecanismo de falha	Parâmetros estatísticos	Procedimento de análise				
		Modelo numérico	ABNT NBR 9062:2017 e ABNT NBR 6118:2023	El Debs (2017)	ACI 318:2019	NP EN 1992-1-1:2010
T	Média	1,01	1,05	1,12	1,12	1,12
	CV	4%	16%	16%	16%	15%
S	Média	1,00	1,10	1,10	1,10	1,66
	CV	16%	40%	40%	40%	38%
C	Média	0,98	0,36	1,60	1,05	1,53
	CV	14%	22%	24%	23%	16%

T – Ruína por flexão ou escoamento da armadura do tirante; S – Ruína por escoamento da armadura de suspensão; C – Ruína por compressão (esmagamento da biela na região do dente).

Fonte: Autora

Analisando a Tabela 30, observa-se que a estimativa do modelo numérico para o tipo de falha T foi favorável à segurança, com uma diferença de apenas 1% e coeficiente de variação de 4%. Para o tipo de falha S, o modelo numérico apresentou razão F_{exp}/F_{calc} exatamente igual a 1,00, com coeficiente de variação igual a 16%. Quanto às estimativas analíticas para os tipos de falha T e S, essas também apresentaram resultados satisfatórios, a favor da segurança e semelhantes entre si. Vale ressaltar, entretanto, que os modelos numéricos apresentaram uma menor dispersão entre os resultados experimentais e os previstos nos ensaios.

Quanto ao tipo de ruína por esmagamento da biela (C), observa-se que os resultados analíticos da ABNT NBR 9062:2017 apresentaram valores de força resistente significativamente superiores aos experimentais, com diferença de 64%, o que é insatisfatório. Por sua vez, o modelo do ACI 318:2019 apresentou uma boa aproximação, com uma diferença

de apenas 5%. Já os resultados de El Debs (2017) e da NP EN 1992-1-1:2010 apresentaram um acerto de 1,60 e 1,53, respectivamente. O modelo numérico, por sua vez, obteve uma média da F_{exp}/F_{calc} igual a 0,98, o que é desfavorável à segurança, embora a diferença seja ínfima, de apenas 2%. Notavelmente, o modelo numérico foi o que apresentou a menor dispersão entre os resultados, com um coeficiente de variação de 14%.

A análise dos resultados dos dentes que sofreram ruína por esmagamento do concreto pode ser feita, também, em termos da tensão na biela da região do dente (τ_{wu}), utilizando a Equação (98) a partir da força de ruína por compressão (F_{rc}). Dessa forma, é possível compará-la à resistência à compressão do concreto, por meio da razão τ_{wu}/f_c . Os resultados obtidos para cada método analítico estão apresentados na Tabela 31.

$$\tau_{wu} = F_{rc}/(b \cdot d) \quad (98)$$

Tabela 31 – Resultados de τ_{wu}/f_c dos dentes que sofreram ruína por compressão para cada procedimento analítico

Referência	Exp.	Numérico		ABNT NBR 9062:2017		El Debs (2017)		ACI 318:2019		NP EN 1992-1-1:2010		
		$\tau_{wu,exp}$	τ_{wu}	exp	τ_{wu}	exp	τ_{wu}	exp	τ_{wu}	exp	τ_{wu}	exp
		f_c	f_c	num	f_c	$calc$	f_c	$calc$	f_c	$calc$	f_c	$calc$
	01	0,23	0,22	1,05	0,77	0,30	0,16	1,44	0,27	0,85	0,16	1,44
	05	0,19	0,21	0,90	0,77	0,25	0,16	1,19	0,27	0,70	0,16	1,19
Lu, Lin e Yu (2012)	07	0,36	0,37	0,97	0,77	0,47	0,17	2,12	0,26	1,38	0,19	1,89
	11	0,30	0,40	0,75	0,77	0,39	0,16	1,88	0,27	1,11	0,19	1,58
	13	0,27	0,23	1,17	0,77	0,35	0,16	1,69	0,27	1,00	0,17	1,59
	21	0,22	0,21	1,05	0,57	0,39	0,16	1,38	0,19	1,16	0,14	1,57
Média	-	-	0,98	-	0,36	-	1,60	-	1,05	-	1,53	
CV	-	-	14%	-	22%	-	24%	-	23%	-	16%	

Fonte: Autora

Dada a importância de evitar rupturas frágeis por esmagamento da biela, o ACI 318:2019 sugere que a tensão de cisalhamento na biela seja dimensionada de forma a não ultrapassar o valor de $0,2f_c$, enquanto El Debs (2017) recomenda que essa tensão seja limitada a $0,17f_c$. Considerando que a ABNT NBR 9062:2017 apresentou uma estimativa de força última muito inferior aos resultados experimentais que sofreram esse tipo de ruína, torna-se evidente a necessidade de revisar e aprimorar a norma no que diz respeito à verificação da tensão de compressão no concreto na região do dente.

No entanto, é importante ressaltar que os procedimentos de projeto analisados têm limitações e alcances que, em alguns casos, foram ultrapassados durante o estudo. Ainda assim,

ao aplicar o fator de correção (FC), observa-se uma maior consistência do modelo numérico em relação aos resultados experimentais e analíticos.

5 ANÁLISES PARAMÉTRICAS

5.1 Considerações gerais

As análises paramétricas realizadas objetivaram avaliar a influência dos seguintes parâmetros no comportamento dos dentes de concreto: i) espalhamento da armadura de suspensão; ii) quantidade da armadura de costura; iii) resistência à compressão do concreto.

5.2 *Script em Python*

Foi desenvolvido um script em Python integrado ao software Abaqus, com o objetivo de otimizar diversas etapas do processo de modelagem, como a criação das vigas e armaduras, montagem das armaduras, atribuição das propriedades dos materiais, geração de malha, definição das condições de contorno, submissão para processamento e coleta dos resultados. Essa ferramenta visa agilizar o tempo de modelagem, oferecendo um construtor automatizado de vigas de concreto com dentes nas extremidades em elementos finitos, facilitando assim o desenvolvimento de projetos futuros.

5.3 Dentes de concreto analisados

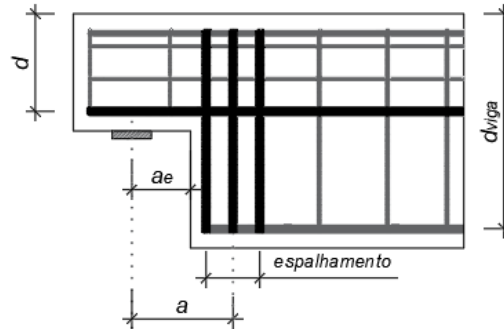
As dimensões dos dentes de concreto analisados foram baseadas nos modelos de Falcón, Pallarés e Miguel (2019) e de Rajapakse, Degée e Mihaylov (2022), com algumas modificações nos comprimentos dos dentes. Essas modificações foram realizadas com o objetivo de possibilitar análises para diferentes razões a/d , com foco em valores entre 0,5 e 1,0, que são definidos como dentes curtos pela ABNT NBR 9062:2017. Contudo, em determinadas situações, esse limite foi ultrapassado (valores em vermelho na Tabela 32).

As vigas utilizadas apresentaram largura igual a 250 mm e comprimentos de dente de 200 mm, 250 mm e 300 mm, e alturas úteis de 250 mm (Grupo A), conforme Rajapakse, Degée e Mihaylov (2022), e 450 mm (Grupo B), conforme Falcón, Pallarés e Miguel (2019).

Considerando que a distância a depende do centro de gravidade da armadura de suspensão, que varia em função da distribuição dessa armadura, adotou-se a distância a_e como parâmetro. Esta corresponde à distância entre o ponto de reação da carga e a face da viga, como pode ser visualizado na Figura 56. Assim, para avaliar o comportamento estrutural dos dentes,

foram consideradas seis variações geométricas, com razões a_e/d iguais a 0,22, 0,28, 0,33, 0,4, 0,5 e 0,6, conforme ilustrado na Figura 57.

Figura 56 – Parâmetros geométricos dos dentes de concreto analisados



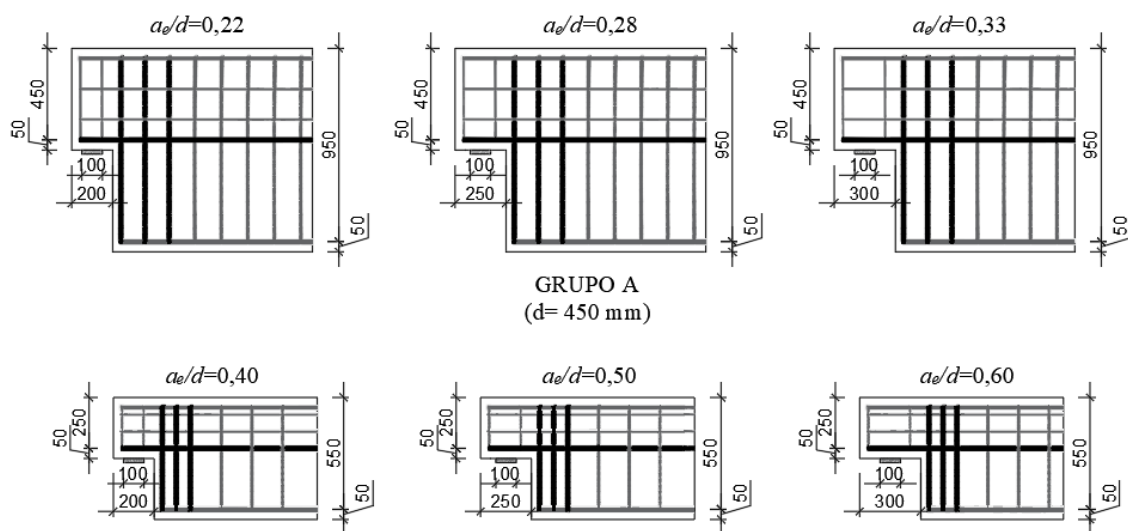
Fonte: Autora

Tabela 32 – Relação a/d em função do espalhamento da armadura de suspensão

a_e/d	d (mm)	Espalhamento da armadura de suspensão					
		$0,50d_{viga}$	$0,40d_{viga}$	$0,33d_{viga}$	$0,25d_{viga}$	$0,20d_{viga}$	$0,10d_{viga}$
0,22	450	0,84	0,73	0,66	0,58	0,52	0,42
0,28	450	0,89	0,79	0,72	0,63	0,58	0,47
0,33	450	0,95	0,84	0,77	0,69	0,63	0,53
0,40	250	1,11	1,00	0,93	0,84	0,78	0,67
0,50	250	1,21	1,10	1,03	0,94	0,88	0,77
0,60	250	1,31	1,20	1,13	1,04	0,98	0,87

Fonte: Autora

Figura 57 – Geometrias analisadas – unidades em mm



GRUPO B
($d = 250$ mm)

Fonte: Autora

O dimensionamento e o detalhamento das armaduras dos dentes foram realizados de acordo com a ABNT NBR 9062:2017.

5.4 Propriedade dos materiais

Para as análises paramétricas, optou-se por variar as propriedades do concreto quatro vezes: conforme o DEB-1.7, o DEB-1.8 e o DEB-1.4 de Falcón, Pallarés e Miguel (2019) e conforme o OL5 de Rajapakse, Degée e Mihaylov (2022). Assim, as resistências à compressão do concreto, f_c , foram consideradas como 30,0 MPa, 32,2 MPa, 40,4 MPa e 49,6 MPa, respectivamente.

Quanto às propriedades do aço, uniformizou-se uma resistência ao escoamento, f_y , de 500 MPa, a resistência última, f_u , foi adotada como 650 MPa, com módulo de elasticidade, E_s , igual a 210 GPa.

5.5 Fator de correção

Na análise dos resultados numéricos dos dentes utilizados para a calibração do modelo, observou-se uma sensibilidade à tensão de cisalhamento atuante. Identificou-se uma tendência linear que indicava que o erro do modelo aumentava à medida que a tensão de cisalhamento prevista experimentalmente crescia.

Com o intuito de corrigir a previsão numérica, é possível aplicar um fator de correção, calculado a partir da Equação (99), obtida por meio da regressão linear da dispersão dos dados apresentados anteriormente na Figura 43.

$$FC = 3,9092 \cdot \left(\frac{F_{dim}}{b \cdot d \cdot f_c} \right) + 0,7888 \quad (99)$$

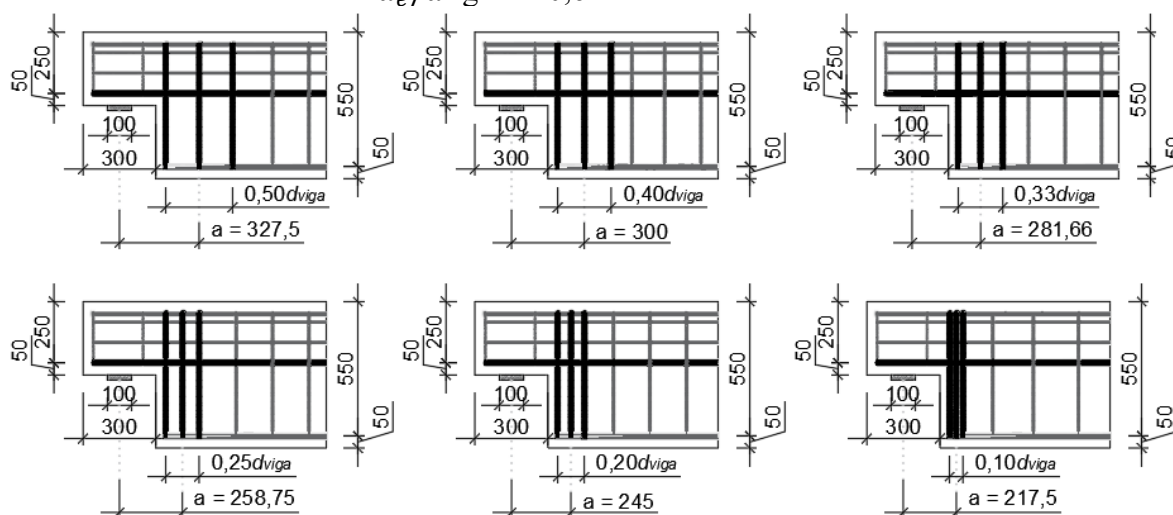
Portanto, nas análises paramétricas, aplicou-se o fator de correção (FC) aos resultados. Sendo F_{dim} a força utilizada de dimensionamento, para as análises do Caso de 1, em que $F_{dim}/(b \cdot d \cdot f_c)$ é igual a 0,10, utilizou-se um FC de 1,180. No Caso de dimensionamento 2, com $F_{dim}/(b \cdot d \cdot f_c)$ igual a 0,15, o FC foi igual a 1,375. Já no Caso 3, em que $F_{dim}/(b \cdot d \cdot f_c)$ é igual a 0,20, o FC foi igual a 1,571.

5.6 Influência da distribuição da armadura de suspensão

Para analisar a influência da distribuição da armadura de suspensão, inicialmente, foi adotada uma força de dimensionamento, F_{dim} , correspondente a $0,1 \cdot b \cdot d \cdot f_c$. As análises de distribuição da armadura de suspensão foram realizadas de duas maneiras: i) variando a geometria do dente, mantendo constante as propriedades do concreto; ii) variando as propriedades do concreto, mantendo a geometria.

Em todos os casos, a armadura de suspensão foi espalhada em diferentes faixas: $0,50d_{viga}$, $0,40d_{viga}$, $0,33d_{viga}$, $0,25d_{viga}$, $0,20d_{viga}$ e $0,10d_{viga}$. Como dito anteriormente, a distância a varia conforme esse espalhamento, o que resulta em alterações na razão a/d . Como exemplo, o caso do dente com $a_e/d = 0,6$ está ilustrado na Figura 58.

Figura 58 –Variação do espalhamento da armadura de suspensão para o dente com razão a_e/d igual a 0,6 – unidades em mm



Fonte: Autora

5.6.1 Resultados da análise em função da geometria

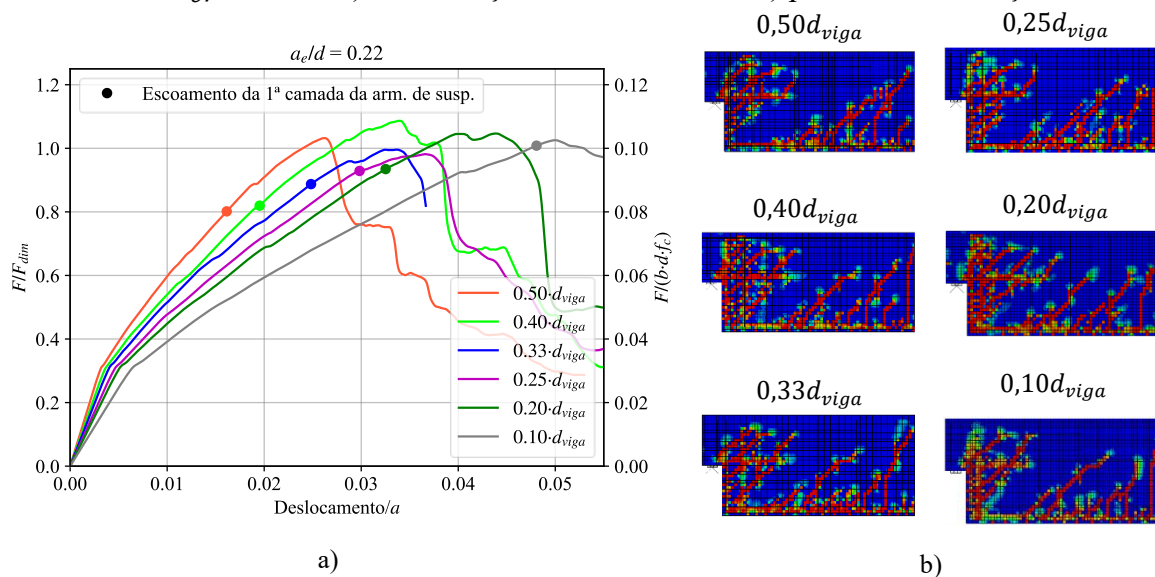
Para a primeira análise, as propriedades do concreto foram mantidas constantes e iguais às do DEB-1.4 de Falcón Pallarés e Miguel (2019), cuja resistência à compressão do concreto é de 40,4 MPa. Em contrapartida, a geometria da viga foi variada em seis configurações, com razões a_e/d de 0,22, 0,28, 0,33, 0,4, 0,5 e 0,6, apresentados anteriormente na Figura 57.

Os resultados obtidos para cada geometria analisada, tanto em termos da curva força x deslocamento quanto do padrão de fissuração no momento da força última, descrito pelo dano à tração do concreto, estão apresentados nas Figura 59 a Figura 64. No eixo horizontal dos gráficos, está representada a razão entre o deslocamento do atuador e a distância a do dente,

enquanto nos eixos verticais, estão indicadas as cargas, expressas de forma adimensional como F/F_{dim} e $F/(b \cdot d \cdot f_c)$.

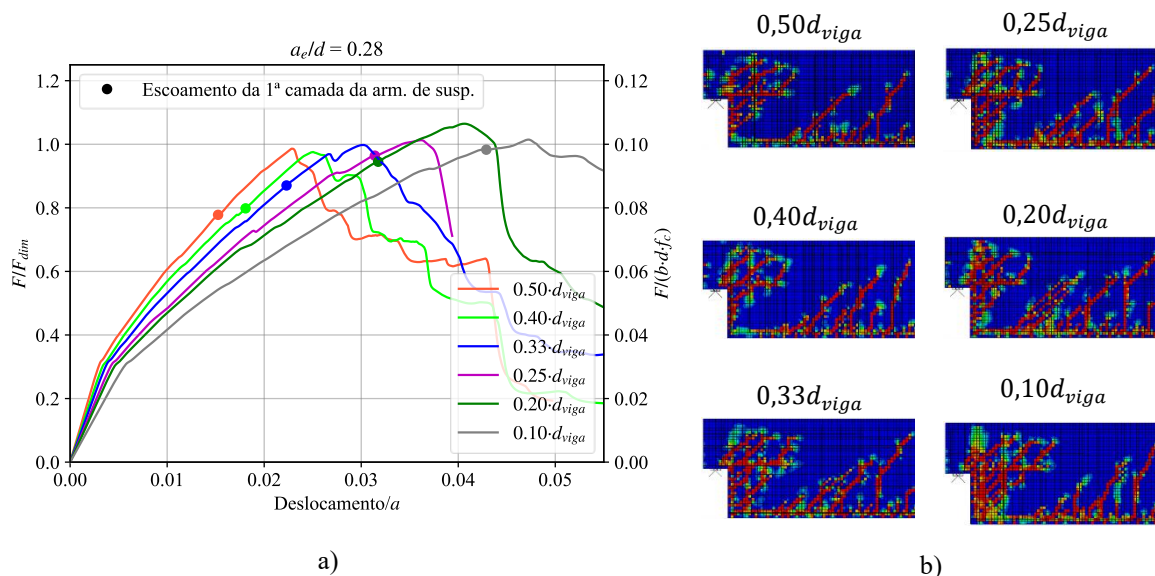
Nos gráficos, foram destacados os pontos em que ocorreu o escoamento da primeira camada da armadura de suspensão, caracterizando o modo de ruína.

Figura 59 – Efeito do espalhamento da armadura de suspensão para dente de concreto com razão $a_e/d = 0,22$: a) curva força x deslocamento e b) padrão de fissuração



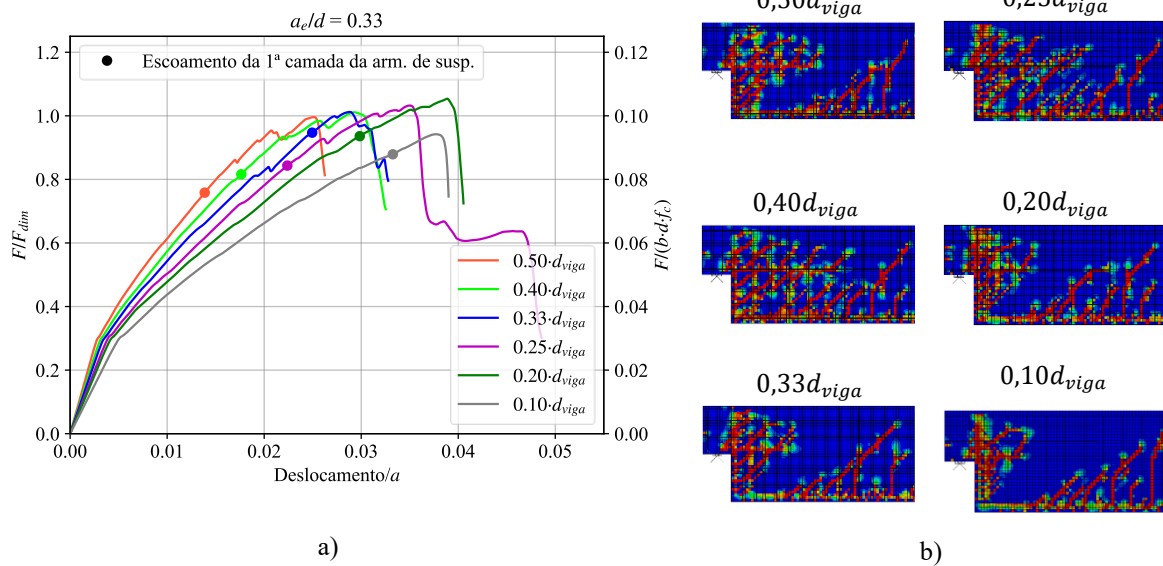
Fonte: Autora

Figura 60 – Efeito do espalhamento da armadura de suspensão para dente de concreto com razão $a_e/d = 0,28$: a) curva força x deslocamento e b) padrão de fissuração



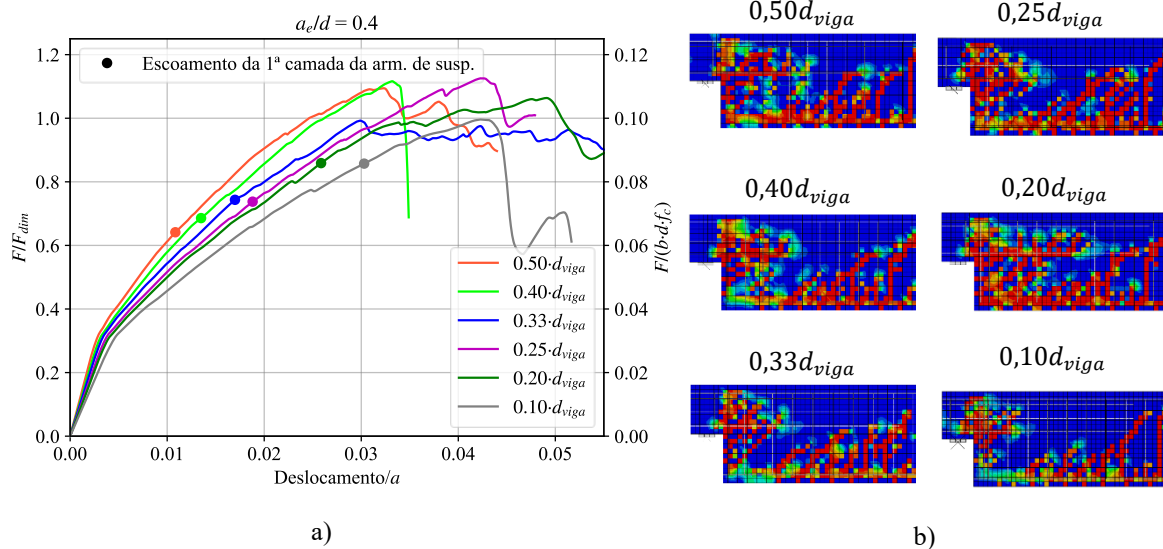
Fonte: Autora

Figura 61 – Efeito do espalhamento da armadura de suspensão para dente de concreto com razão $a_e/d = 0,33$: a) curva força x deslocamento e b) padrão de fissuração



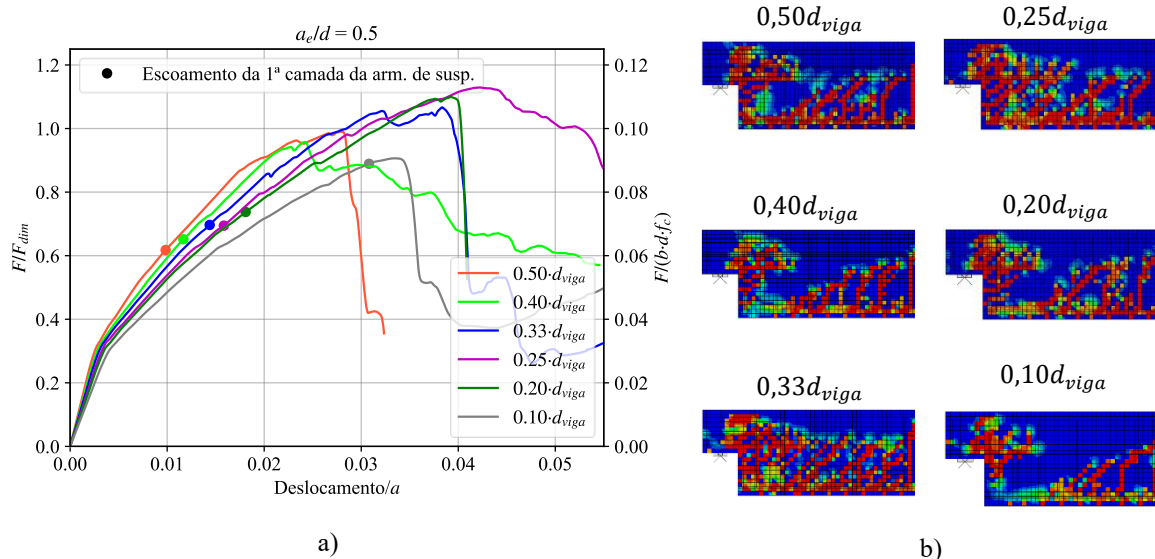
Fonte: Autora

Figura 62 – Efeito do espalhamento da armadura de suspensão para dente de concreto com razão $a_e/d = 0,4$: a) curva força x deslocamento e b) padrão de fissuração



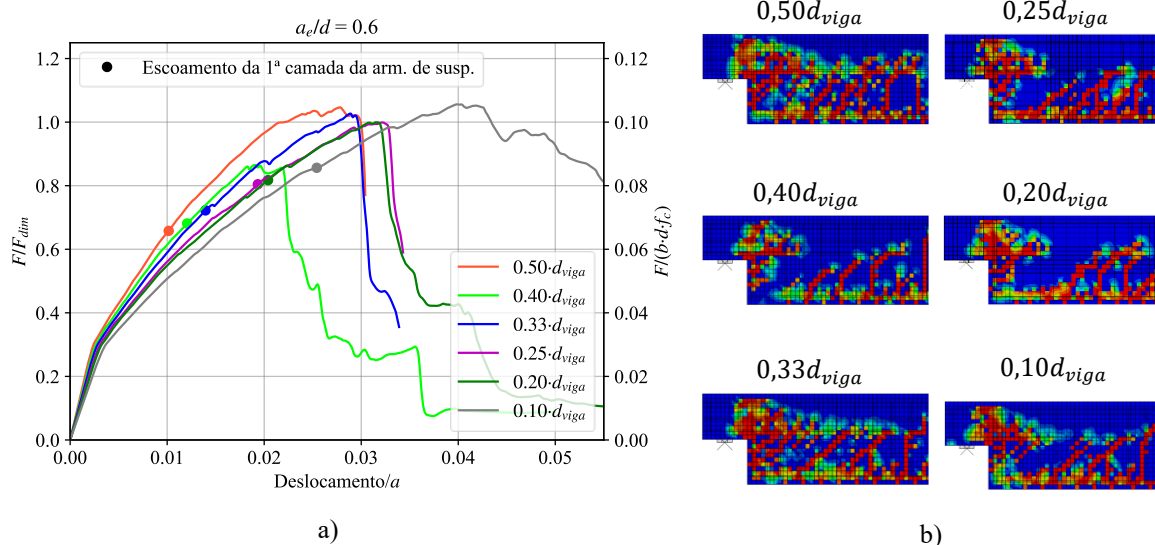
Fonte: Autora

Figura 63 – Efeito do espalhamento da armadura de suspensão para dente de concreto com razão $a_e/d=0,5$: a) curva força x deslocamento e b) padrão de fissuração



Fonte: Autora

Figura 64 – Efeito do espalhamento da armadura de suspensão para dente de concreto com razão $a_e/d=0,6$: a) curva força x deslocamento e b) padrão de fissuração



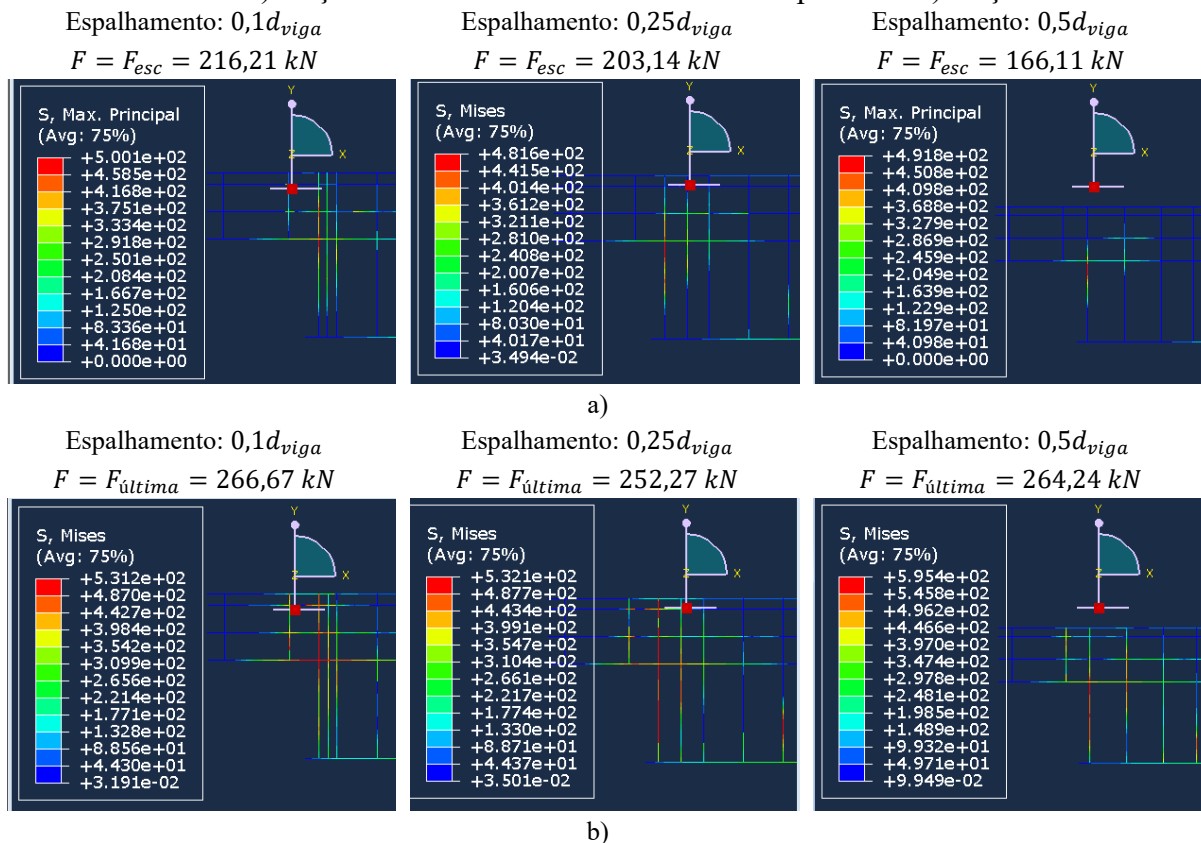
Fonte: Autora

Observa-se que, de maneira geral, as curvas de força x deslocamento dos dentes indicam um comportamento pós-pico frágil. Além disso, é possível notar que, quanto maior o espalhamento da armadura, menor a capacidade de deformação na ruptura. Isso ocorre porque, à medida que a armadura de suspensão é mais espalhada, a distância a aumenta e, conseqüentemente, a área de aço da armadura do tirante também. Por isso, há um aumento da rigidez, uma vez que a resistência à flexão é incrementada com o aumento da quantidade de

armadura do tirante (Abdul-Jawad, 2018). No entanto, esse fenômeno pode ser parcialmente explicado pela mobilização das solicitações nas armaduras de suspensão, que depende de forma significativa do padrão de fissuração do concreto.

Como consequência do padrão de fissuração, observa-se que, para maior espalhamento, a primeira camada da armadura de suspensão é a mais solicitada. Em contrapartida, para menor espalhamento, a tensão se distribui de maneira mais homogênea ou uniforme nas diferentes camadas da armadura de suspensão. Esse fenômeno pode ser observado na Figura 65, em que a tensão nas armaduras do dente com a_e/d igual a 0,6 para os espalhamentos de $0,10d_{viga}$, $0,25d_{viga}$ e $0,50d_{viga}$ é apresentada como exemplo.

Figura 65 – Tensão nas armaduras do dente $a_e/d = 0,6$ para diferentes espalhamentos nos instantes de a) força de escoamento da armadura de suspensão e b) força última



Outro ponto a ser observado é que, independentemente do espalhamento adotado, o padrão de fissuração foi similar em todos os casos. Em todos os testes, a fissuração teve início no canto reentrante.

Além disso, de maneira geral, verificou-se que as forças máximas alcançadas foram semelhantes entre si, independentemente do espalhamento da armadura de suspensão. No

entanto, os dentes com espalhamento de $0,20d_{viga}$ e $0,25d_{viga}$, em média, apresentaram as maiores resistências. Para esses dentes, a razão entre a força última alcançada numericamente e a força utilizada no dimensionamento foi de 1,05, com coeficientes de variação de 3% e 6%, respectivamente. Em seguida, os espalhamentos de $0,33d_{viga}$ e $0,50d_{viga}$ apresentaram razão $F_{última}/F_{dim}$ igual a 1,02, com coeficientes de variação iguais a 3% e 4%, respectivamente. Por fim, os espalhamentos de $0,10d_{viga}$ e $0,40d_{viga}$ apresentaram razões em torno de 1,00. Assim, os resultados de força última encontraram-se próximos da força de dimensionamento, variando entre ligeiramente abaixo e ligeiramente acima, o que indicou resultados ora favoráveis à segurança, ora contrários. Esses resultados podem ser observados na Tabela 33.

Tabela 33 – Relação $F_{última}/F_{dim}$ em função do espalhamento da armadura de suspensão

a_e/d	d (mm)	Espalhamento da armadura de suspensão					
		$0,50d_{viga}$	$0,40d_{viga}$	$0,33d_{viga}$	$0,25d_{viga}$	$0,20d_{viga}$	$0,10d_{viga}$
0,22	450	1,03	1,09	1,00	0,98	1,05	1,03
0,28	450	0,99	0,98	1,00	1,01	1,06	1,01
0,33	450	1,00	1,01	1,01	1,03	1,05	0,94
0,40	250	1,09	1,12	0,99	1,13	1,06	1,00
0,50	250	0,99	0,96	1,07	1,13	1,10	0,91
0,60	250	1,05	0,87	1,03	1,00	1,00	1,06
Média		1,02	1,00	1,02	1,05	1,05	0,99
CV		4%	9%	3%	6%	3%	6%

Fonte: Autora

As relações $F_{esc}/F_{última}$ encontradas para os dentes de concreto estão apresentadas na Tabela 34. F_{esc} é a carga relativa ao escoamento da primeira camada da armadura de suspensão e $F_{última}$ é a força máxima alcançada numericamente.

Tabela 34 – Relação $F_{esc}/F_{última}$ em função do espalhamento da armadura de suspensão

a_e/d	d (mm)	Espalhamento da armadura de suspensão					
		$0,50d_{viga}$	$0,40d_{viga}$	$0,33d_{viga}$	$0,25d_{viga}$	$0,20d_{viga}$	$0,10d_{viga}$
0,22	450	0,78	0,75	0,89	0,95	0,89	0,98
0,28	450	0,79	0,82	0,87	0,95	0,89	0,97
0,33	450	0,76	0,81	0,94	0,82	0,89	0,93
0,40	250	0,59	0,61	0,75	0,66	0,81	0,86
0,50	250	0,62	0,68	0,65	0,61	0,67	0,98
0,60	250	0,63	0,79	0,70	0,81	0,82	0,81
Média		0,69	0,74	0,80	0,80	0,83	0,92
CV		13%	11%	14%	18%	10%	8%

Fonte: Autora

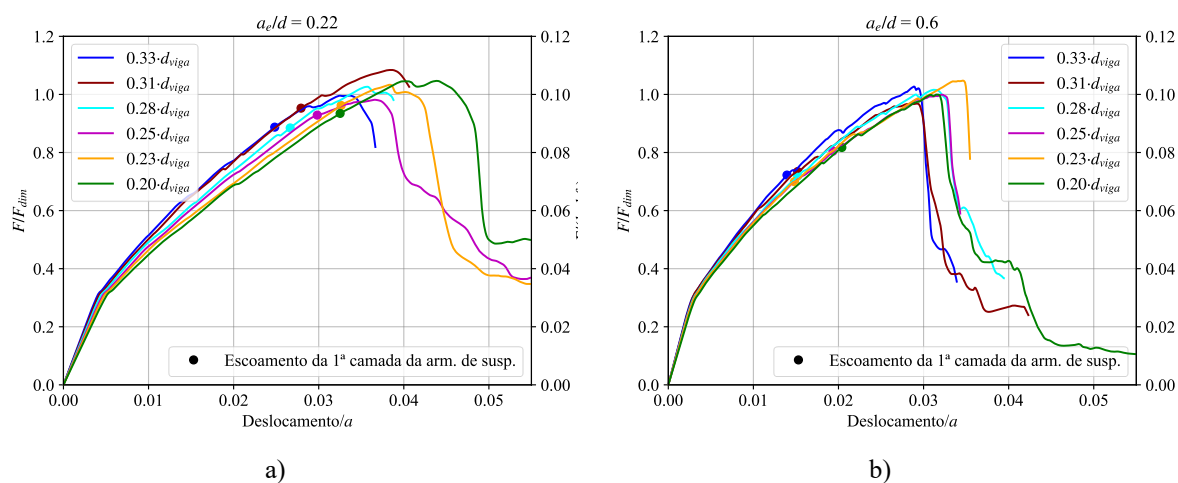
Visto que a armadura de suspensão foi distribuída em três camadas nos dentes analisados, observou-se que a primeira camada foi a única a escoar na maioria dos casos. No entanto, para os dentes com a_e/d iguais a 0,33, 0,40, 0,50 e 0,60, a segunda camada também escoou quando o espalhamento foi de $0,33d_{viga}$, $0,40d_{viga}$ e $0,50d_{viga}$. Nesses casos, o escoamento ocorreu próximo à carga última.

Pode-se observar que, para $0,50d_{viga}$, a armadura de suspensão escoou apresentando uma folga média de 31% entre a força de escoamento e o de força última. De forma semelhante, para $0,40d_{viga}$, a armadura de suspensão escoou com uma folga média de 26% entre a força de escoamento e a última. Os espalhamentos de $0,33d_{viga}$ e $0,25d_{viga}$ apresentaram uma folga média entre a força de escoamento e a força última de 20%. E, por fim, os espalhamentos de $0,20d_{viga}$ e $0,10d_{viga}$ apresentaram escoamento da armadura de suspensão com uma folga média de 17% e 8%, respectivamente. Dessa forma, observa-se a tendência de que, quanto maior o espalhamento da armadura de suspensão, mais distante a força de escoamento da primeira camada de armadura de suspensão está da carga última.

Conforme visto na Figura 65, para maiores espalhamentos, a primeira camada da armadura de suspensão tende a ser a mais solicitada devido à concentração de tensões. Nesse sentido, observou-se que, para os espalhamentos de $0,40d_{viga}$ e $0,50d_{viga}$, o escoamento dessa camada ocorre a uma carga relativamente baixa. Em termos práticos, isso indica que, nesses casos, a armadura de suspensão não foi utilizada de forma otimizada, pois as camadas subsequentes não foram plenamente aproveitadas.

Por outro lado, não se observou uma alteração significativa no comportamento dos dentes em função do espalhamento da armadura de suspensão quando este se encontrava entre $0,20d_{viga}$ e $0,33d_{viga}$. Os valores de força última, de força de escoamento da armadura de suspensão e deslocamento máximo tendem a flutuar em níveis semelhantes. Por essa razão, foi realizada uma análise mais refinada do comportamento da curva de força x deslocamento para os dentes com a_e/d iguais a 0,22 e 0,60, considerando a distribuição da armadura de suspensão em faixas entre $0,20d_{viga}$ e $0,33d_{viga}$. Os resultados obtidos estão apresentados na Figura 66.

Figura 66 – Análise da sensibilidade das curvas de força x deslocamento para espalhamentos entre $0,33d_{viga}$ e $0,20d_{viga}$ dos dentes com a_e/d iguais a a) 0,22 e b) 0,60



Fonte: Autora

No caso em que a_e/d é igual a 0,22, as maiores forças últimas ocorreram quando os espalhamentos foram de $0,31d_{viga}$ e $0,20d_{viga}$. Por outro lado, as maiores forças obtidas para o dente com a_e/d igual a 0,60 ocorreram quando os espalhamentos foram de $0,23d_{viga}$ e $0,33d_{viga}$. Assim, observa-se que não há um padrão claro para esse intervalo de espalhamentos, nem uma influência significativa na resistência ou na ductilidade do dente.

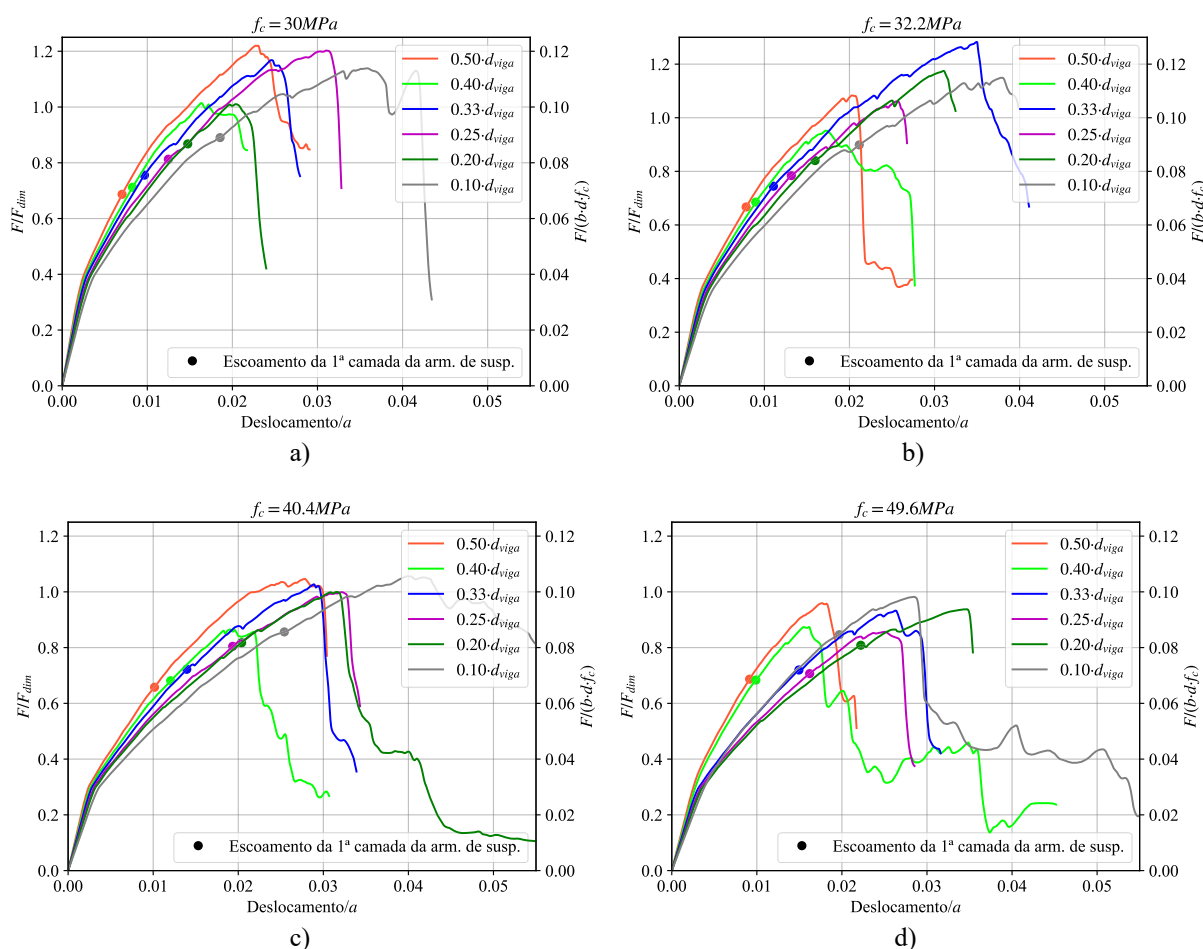
A norma ABNT NBR 9062:2017 recomenda a distribuição da armadura de suspensão até $0,25d_{viga}$ a partir da primeira camada da armadura. No entanto, os resultados numéricos obtidos indicam que esse detalhamento não exerce influência significativa no comportamento estrutural do dente quando essa armadura está distribuída até $0,33d_{viga}$.

5.6.2 Resultados da análise em função das propriedades do concreto

Nas análises subsequentes, foram consideradas diferentes propriedades do concreto com base em modelos utilizados na calibração, sendo eles: i) DEB-1.7 de Falcón, Pallarés e Miguel (2019), com f_c igual a 30,0 MPa; ii) DEB-1.8 de Falcón, Pallarés e Miguel (2019), com f_c igual a 32,2 MPa; iii) OL5 de Rajapakse, Degée e Mihaylov (2022), com f_c igual a 49,6 MPa. Para essas análises, a geometria do dente foi mantida constante, com razão a_e/d igual a 0,6, permitindo avaliar o efeito da distribuição da armadura de suspensão em função da resistência à compressão do concreto.

As forças de dimensionamento adotadas foram, respectivamente, 187,5 kN, 201,25 kN e 310 kN. Dessa forma, a tensão de cisalhamento adimensional foi mantida constante em 0,1. As curvas de força x deslocamento obtidas nas análises estão apresentadas na Figura 67.

Figura 67 – Efeito do espalhamento da armadura de suspensão para dente de concreto com razão $a_e/d=0,6$ para f_c igual a a) 30,0 MPa, b) 32,2 MPa, c) 40,4 MPa, d) 49,6 MPa



Fonte: Autora

É amplamente reconhecido que, na prática, a resistência de vigas com dentes de concreto aumenta com a resistência à compressão do concreto (Lu et al., 2003; Abdul-Jawad, 2018). Essa tendência foi confirmada pelos resultados, que mostraram um aumento nas forças últimas alcançadas à medida que a resistência à compressão do concreto aumentava. Esse comportamento pode ser verificado na Tabela 35, que apresenta a força última para cada espalhamento da armadura de suspensão, considerando as diferentes propriedades do concreto.

Em ordem crescente de resistência à compressão do concreto, as forças últimas médias foram: 211,07 kN; 224,86 kN; 252,23 kN; e 286,38 kN. Contudo, assim como na análise

anterior, observa-se que os espalhamentos de $0,40d_{viga}$ e $0,50d_{viga}$, além de apresentarem menor ductilidade, impactaram negativamente na resistência última. Ao desconsiderar esses espalhamentos, as médias de força última obtidas foram de 211,87 kN; 234,88 kN; 257,67 kN; e 287,46 kN.

Tabela 35 – Força última em função do espalhamento da armadura de suspensão para diferentes valores de f_c no dente com a_e/d igual a 0,6

$F_{última}$ (kN)	f_c (MPa)			
	30,0 MPa	32,2 MPa	40,4 MPa	49,6 MPa
0,50 d_{viga}	228,75	218,04	264,24	297,41
0,40 d_{viga}	190,19	191,58	218,43	271,02
0,33 d_{viga}	219,06	258,20	259,35	289,14
0,25 d_{viga}	225,49	213,62	252,27	265,57
0,20 d_{viga}	189,41	236,44	252,40	290,72
0,10 d_{viga}	213,53	231,28	266,67	304,43
Média	211,07	224,86	252,23	286,38

Fonte: Autora

No entanto, nota-se que há um decréscimo significativo na resistência final dos modelos quando comparada à expectativa de dimensionamento à medida que a resistência à compressão aumenta. Em média, as razões $F_{última}/F_{dim}$, em ordem crescente de f_c , foram de 1,13; 1,12; 1,00; e 0,92, sendo essa última contrária à segurança. Ao desconsiderar os resultados para $0,40d_{viga}$ e $0,50d_{viga}$, as razões $F_{última}/F_{dim}$ foram de 1,13; 1,17; 1,02 e 0,93.

Outro ponto a ser observado é que, novamente, a força de escoamento se aproxima da força última do modelo à medida que a armadura de suspensão se torna mais concentrada. Assim, verifica-se que esse comportamento ocorreu independentemente das propriedades do concreto e da geometria da viga dentro do escopo deste estudo.

Portanto, reforça-se a conclusão de que o detalhamento da armadura de suspensão não exerce influência significativa no comportamento estrutural do dente quando a armadura é distribuída até $0,33d_{viga}$.

5.7 Influência das armaduras de costura

Para investigar a influência da armadura de costura no comportamento estrutural dos dentes de concreto sob a perspectiva do espalhamento da armadura de suspensão, foram analisadas duas situações: i) variando a geometria do dente, mantendo constantes as propriedades do concreto e ii) variando as propriedades do concreto, mantendo constante a

geometria. Em todas as análises, considerou-se a variação no detalhamento da armadura de suspensão, com espalhamentos iguais a $0,33d_{viga}$, $0,25d_{viga}$, $0,20d_{viga}$. Esses espalhamentos foram escolhidos com o objetivo de verificar se, assim como nas análises anteriores, eles apresentariam um comportamento semelhante entre si.

Os dentes foram analisados em três casos de dimensionamento, resultando em diferentes quantidades de armaduras. Os Casos 1, 2 e 3 correspondem a dimensionamentos para uma tensão na região do dente $F/(b \cdot d \cdot f_c)$ igual a 0,1, 0,15 e 0,2, respectivamente. Essas tensões foram escolhidas com o intuito de investigar a influência da armadura de costura sob diferentes condições de ruptura: no primeiro caso, busca-se o rompimento por deformação excessiva da armadura de suspensão; no segundo, uma carga intermediária; e, no terceiro, uma carga capaz de causar ruptura exclusivamente por compressão.

O dimensionamento das armaduras dos dentes foi realizado conforme a ABNT NBR 9062:2017. Em relação à armadura de costura, foram considerados dois cenários: i) sem armadura de costura e ii) com uma taxa $A_{s,cost} = 0,40A_{s,tir}$, conforme estabelecido pela norma brasileira.

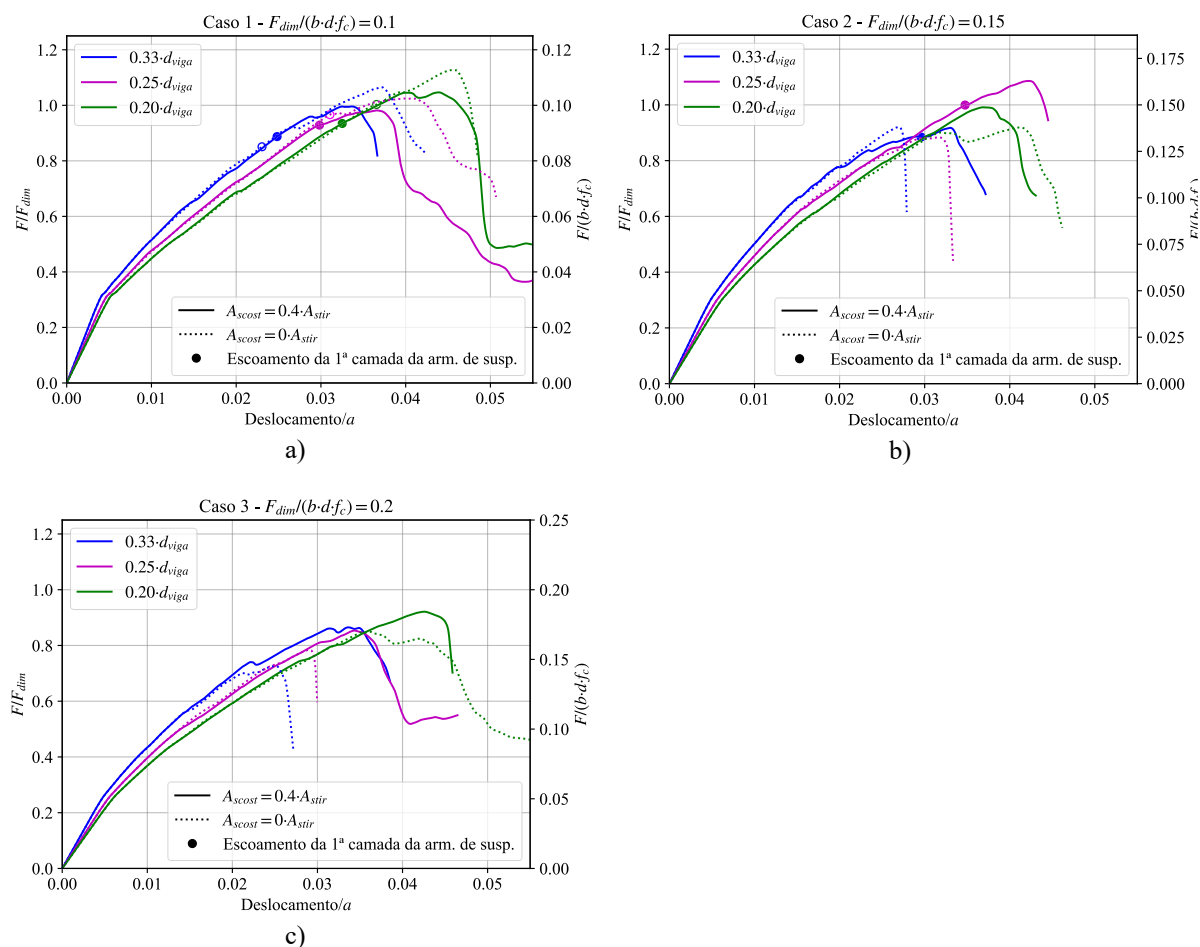
5.7.1 Resultados da análise em função da geometria

Foram considerados dentes com as razões a_e/d iguais a 0,22 e 0,60. Essas geometrias foram selecionadas por possibilitam a obtenção de dentes com razões a/d variando entre 0,52 e 1,13. As propriedades do concreto adotadas para esta análise seguiram as especificações do DEB-1.4 de Falcón, Pallarés e Miguel (2019), com resistência à compressão do concreto igual a 40,4 MPa.

No Caso 1, 2 e 3, o dente com a_e/d igual a 0,22 foi dimensionado para as cargas de 454,5 kN, 681,75 kN e 909 kN, respectivamente. Já o dente com a_e/d igual a 0,60 foi dimensionado para as cargas de 252,5 kN, 378,75 kN e 505 kN, respectivamente.

As curvas força x deslocamento obtidas para os três casos de dimensionamento, tanto com quanto sem a consideração da armadura de costura, estão apresentadas na Figura 68 e na Figura 69 para os dentes com a_e/d iguais a 0,22 e 0,60, respectivamente. Nos gráficos, são destacados os pontos correspondentes ao escoamento da primeira camada da armadura de suspensão, o que indica o modo de falha. Nos casos em que não houve escoamento da armadura de suspensão, a falha foi caracterizada por ruptura por compressão do concreto.

Figura 68 – Influência na carga última variando as armaduras de costura para o dente $a_e/d = 0,22$ com f_c igual a 40,4 MPa

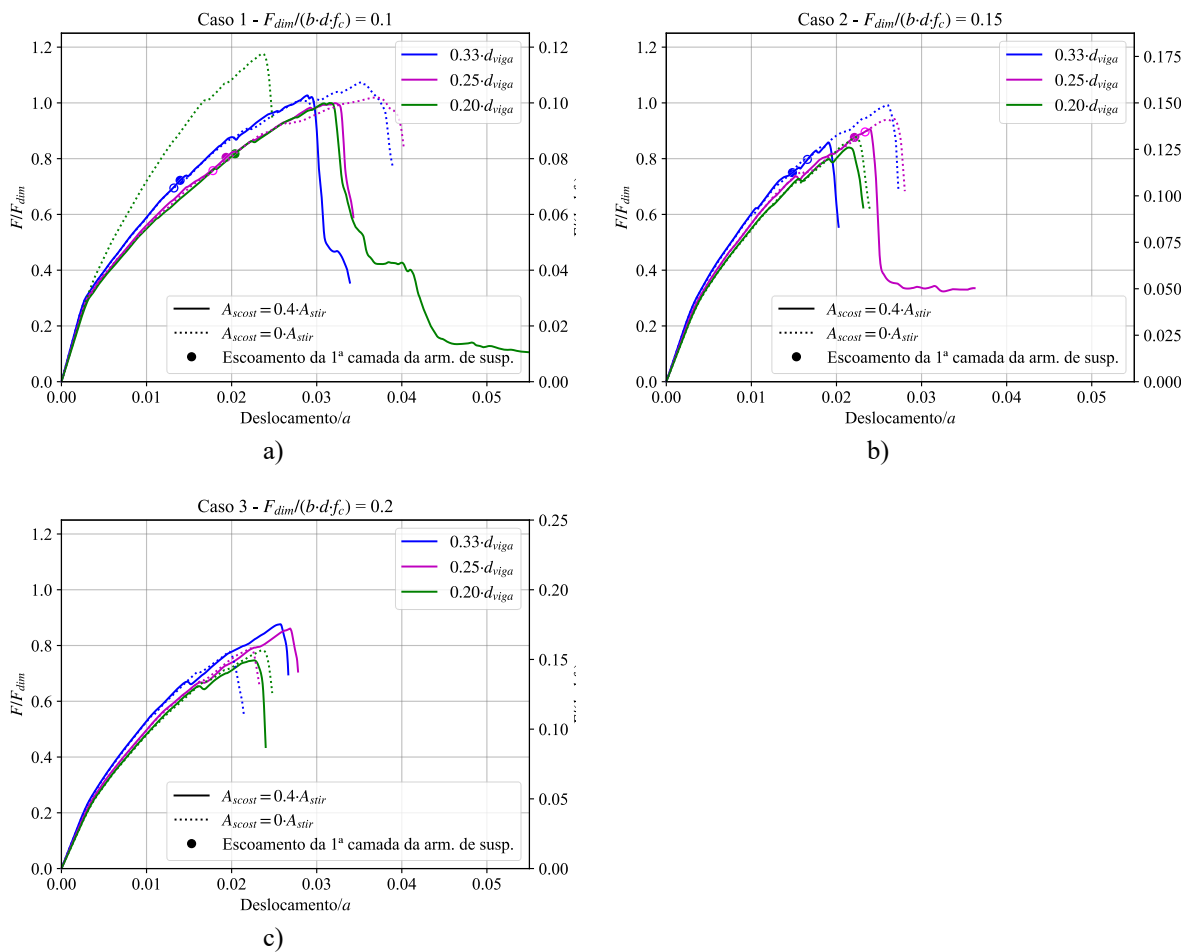


Fonte: Autora

Para o dente com a_e/d igual a 0,22 (Figura 68), observa-se que, no Caso 1, a armadura de suspensão escoou em todos os casos, independentemente da presença da armadura de costura. No Caso 2, a armadura de suspensão escoou apenas quando tinha armadura de costura nos dentes com espaçamentos de $0,25d_{viga}$ e $0,33d_{viga}$. Já no Caso 3, como era esperado, a armadura de suspensão não escoou em nenhuma das situações analisadas.

Para o dente com a_e/d igual a 0,60 (Figura 69), no Caso 1, a armadura de suspensão escoou independentemente da presença da armadura de costura, exceto para o espalhamento de $0,20d_{viga}$ na ausência da armadura de costura, em que se observou um ganho significativo na resistência, mas uma redução considerável na ductilidade do dente. No Caso 2, novamente sem a influência da armadura de costura, a armadura de suspensão não escoou apenas quando essa estava espalhada em $0,20d_{viga}$. No Caso 3, a armadura de suspensão não escoou em nenhuma das situações analisadas.

Figura 69 – Influência na carga última variando as armaduras de costura para o dente $a_e/d = 0,60$ com f_c igual a 40,4 MPa



Fonte: Autora

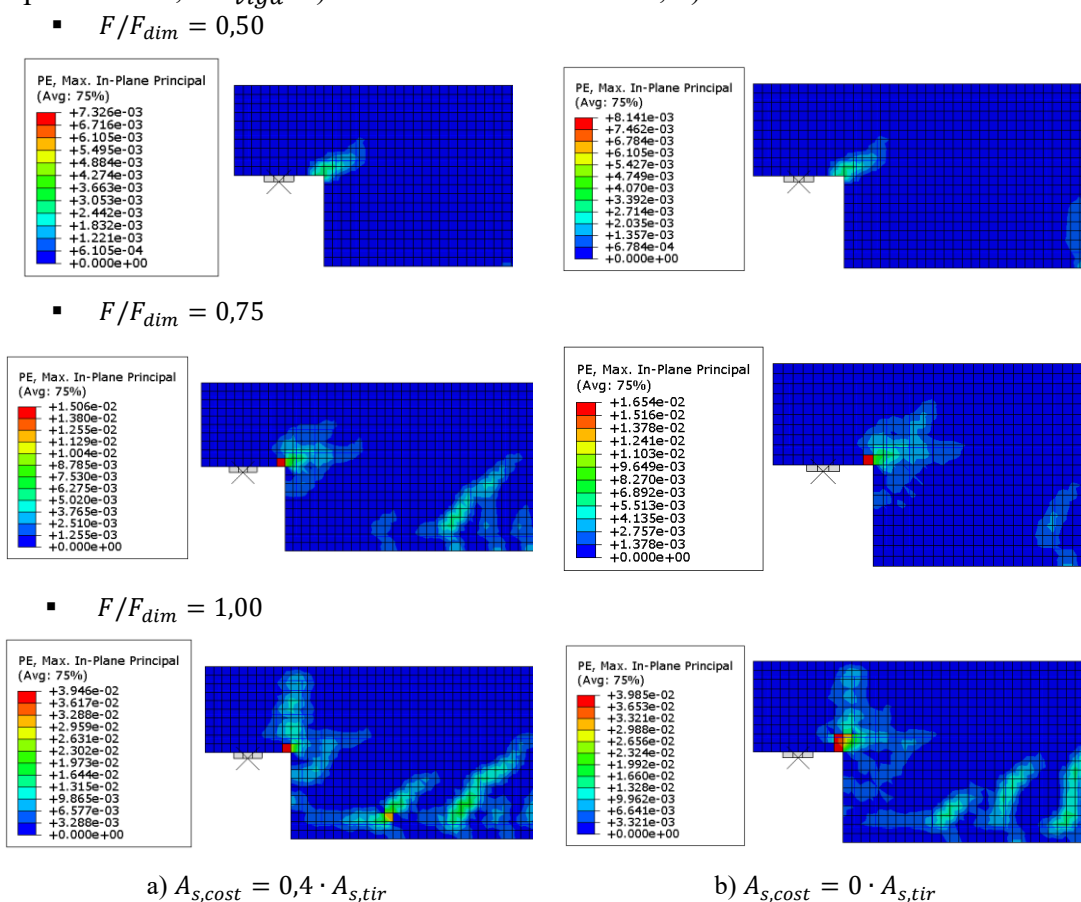
Observa-se que, no Caso 1, as curvas de força x deslocamento foram influenciadas de maneira perceptível pela presença ou ausência da armadura de costura no intervalo de espalhamento da armadura de suspensão analisado. De forma geral, as curvas obtidas sem a armadura de costura indicaram um comportamento ligeiramente mais dúctil e resistente para ambas as geometrias. No entanto, é evidente que a armadura de costura contribuiu para um maior controle da propagação de fissuras em ambas as geometrias.

A abertura de fissuras pode ser observada a partir das deformações plásticas alcançadas numericamente. Como exemplo, para o dente com a_e/d igual a 0,60 e armadura de suspensão espalhada em $0,25d_{viga}$, são apresentadas as deformações plásticas para os instantes de F/F_{dim} iguais a 0,50, 0,75 e 1,00, no Caso 1, com e sem armadura de costura, na Figura 70.

É possível notar que o dente com armadura de costura (Figura 70a) apresentou deformações plásticas menores que o dente sem armadura de costura (Figura 70b). No instante

em que F/F_{dim} foi igual a 0,50, a presença da armadura de costura reduziu em 10% a largura da fissura no canto reentrante; para F/F_{dim} igual a 0,75, essa redução foi de 9%; e para F/F_{dim} igual a 1,00, a redução foi de apenas 1%. No entanto, neste último caso, a ausência de armadura de costura provocou um maior alongamento das fissuras na região inferior da viga e na região do canto reentrante. Assim, pode-se concluir que, para o Caso 1, a presença da armadura de costura desempenhou um papel crucial na mitigação da propagação de fissuras.

Figura 70 – Deformações plásticas dos dentes com $a_e/d = 0,60$ e espalhamento da armadura de suspensão de $0,25d_{viga}$: a) com armadura de costura; b) sem armadura de costura – Caso 1

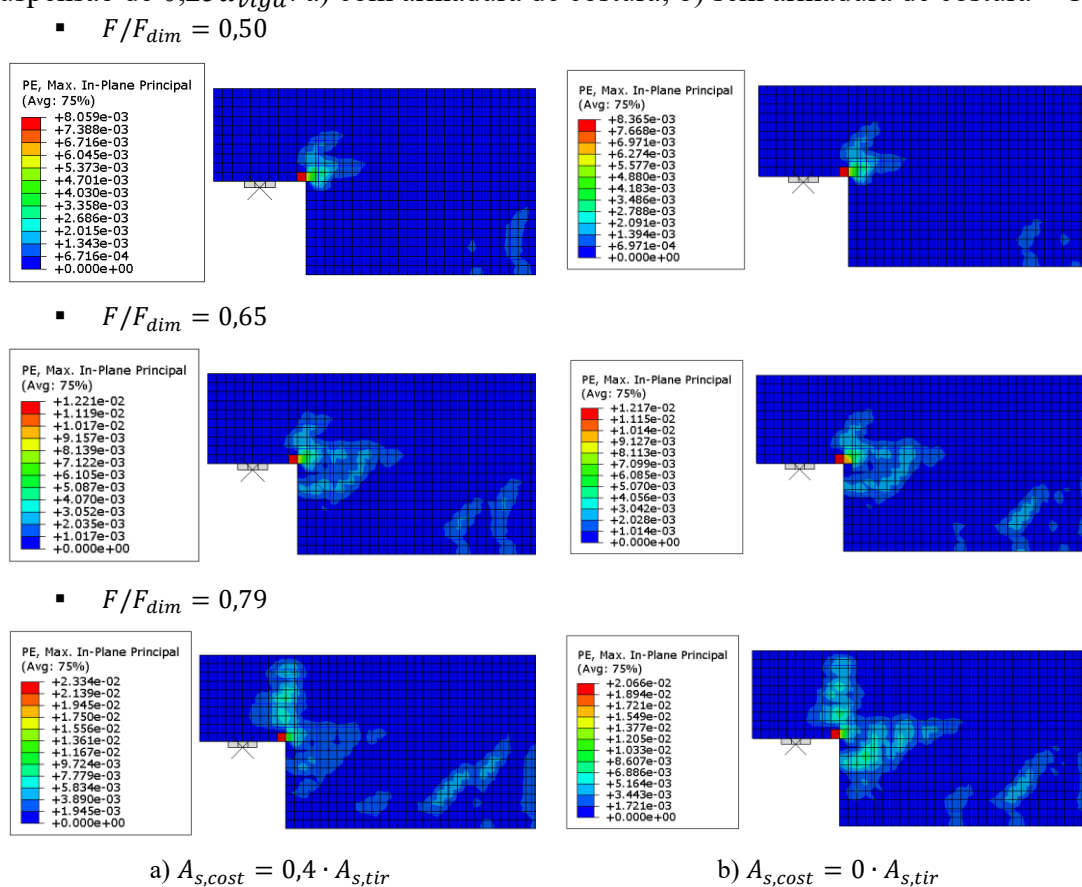


Fonte: Autora

No Caso 2, para a_e/d igual a 0,22 (Figura 68b), a armadura de costura aumentou a ductilidade e resistência do modelo, independentemente do espalhamento da armadura de suspensão. A ausência da armadura de costura resultou no não-escoamento da armadura de suspensão, tornando a ruptura mais frágil. Para o dente com a_e/d igual a 0,60 (Figura 69b), os modelos sem armadura de costura apresentaram comportamento ligeiramente mais dúctil e

A maior diferença entre os modelos com e sem armadura de costura foi observada no Caso 3 (Figura 68c e Figura 69c). Em todas as simulações, não houve escoamento da armadura de suspensão, e as rupturas ocorreram por compressão do concreto na região do dente de forma frágil. No entanto, pode-se perceber que, na ausência da armadura de costura, houve uma menor resistência e um controle reduzido sobre a propagação das fissuras. Esse efeito pode ser observado na Figura 72, a partir das deformações plásticas para o dente com a_e/d igual a 0,60 e armadura de suspensão espalhada em $0,25d_{viga}$.

Figura 72 – Deformações plásticas dos dentes com $a_e/d = 0,60$ e espalhamento da armadura de suspensão de $0,25d_{viga}$: a) com armadura de costura; b) sem armadura de costura – Caso 3



Fonte: Autora

Para o Caso 3, os resultados mostram que, no instante em que F/F_{dim} foi igual a 0,50, a presença da armadura de costura proporcionou uma redução de 4% na largura da fissura. Já para F/F_{dim} igual a 0,65, não houve uma diferença significativa. No entanto, quando a carga atingiu F/F_{dim} igual a 0,79, que corresponde à carga última alcançada pelo dente sem armadura de costura, observou-se um aumento de 13% na largura da fissura que se origina do canto reentrante, no dente com armadura de costura, quando comparado ao modelo sem essa

armadura. Apesar disso, a ausência da armadura de costura resultou em um alongamento e espalhamento muito mais significativos das fissuras, reforçando a importância da armadura de costura no controle da propagação das fissuras e no confinamento da biela para os dentes com elevadas tensões de compressão.

Para avaliar a resistência última alcançada nas análises, é possível analisar as razões $F_{última}/F_{dim}$ e $F_{última}/(b \cdot d \cdot f_c)$, com base na Tabela 36 e na Tabela 37. Essas tabelas apresentam os resultados para os dentes com a_e/d iguais a 0,22 e 0,6, respectivamente.

Tabela 36 – Relação $F_{última}/F_{dim}$ em função do espalhamento da armadura de suspensão, com e sem armadura de costura, para o dente com a_e/d igual a 0,22

$F_{última}/F_{dim}$	$A_{s,cost} = 0,4 \cdot A_{s,tir}$			$A_{s,cost} = 0 \cdot A_{s,tir}$			
Espalhamento	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 1	Caso 2	Caso 3	
0,33 d_{viga}	1,00	0,92	0,87	1,07	0,92	0,85	
0,25 d_{viga}	0,98	1,09	0,85	1,02	0,88	0,78	
0,20 d_{viga}	1,05	0,99	0,92	1,13	0,92	0,73	
Média	$F_{última}/F_{dim}$	1,01	1,00	0,88	1,07	0,91	0,79
	$F_{última}/(b \cdot d \cdot f_c)$	0,10	0,15	0,18	0,11	0,14	0,16

Fonte: Autora

Tabela 37 – Relação $F_{última}/F_{dim}$ em função do espalhamento da armadura de suspensão, com e sem armadura de costura, para o dente com a_e/d igual a 0,6

$F_{última}/F_{dim}$	$A_{s,cost} = 0,4 \cdot A_{s,tir}$			$A_{s,cost} = 0 \cdot A_{s,tir}$			
Espalhamento	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 1	Caso 2	Caso 3	
0,33 d_{viga}	1,03	0,86	0,88	1,07	0,99	0,78	
0,25 d_{viga}	1,00	0,91	0,86	1,02	0,94	0,79	
0,20 d_{viga}	1,00	0,84	0,75	1,18	0,88	0,78	
Média	$F_{última}/F_{dim}$	1,01	0,87	0,83	1,09	0,94	0,78
	$F_{última}/(b \cdot d \cdot f_c)$	0,10	0,13	0,17	0,11	0,14	0,16

Fonte: Autora

Quando se considerou a armadura de costura, no Caso 1, o erro $F_{última}/F_{dim}$ foi, em média, de 1,01 para ambas as geometrias. No Caso 2, a razão $F_{última}/F_{dim}$ foi de 1,00 e 0,87 para os dentes com a_e/d iguais a 0,22 e 0,60, respectivamente. Para o Caso 3, o erro foi de 0,88 e 0,83 para as mesmas geometrias. Dessa forma, a tensão na região do dente, $F_{última}/(b \cdot d \cdot f_c)$, para o dente com a_e/d igual a 0,22 resultou em 0,10, 0,15 e 0,18 para os Casos 1, 2 e 3, respectivamente. Para o dente com a_e/d igual a 0,60, a tensão resultou em 0,10, 0,13 e 0,17 nos Casos 1, 2 e 3, respectivamente.

Quando não havia armadura de costura, no Caso 1, a razão $F_{última}/F_{dim}$ foi, em média, 1,07 e 1,09 para os dentes com a_e/d iguais a 0,22 e 0,60, respectivamente. No Caso 2, a razão $F_{última}/F_{dim}$ foi de 0,91 e 0,94, respectivamente. No Caso 3, a força última atingida correspondeu a 0,79 e 0,78 da força utilizada no dimensionamento, respectivamente. Assim, a tensão na região do dente, $F_{última}/(b \cdot d \cdot f_c)$, para as duas geometrias resultou em 0,11, 0,14 e 0,16 para os Casos 1, 2 e 3, respectivamente.

No Caso 3, observa-se que, apesar de ter sido dimensionado para uma tensão de cisalhamento adimensional $F_{dim}/(b \cdot d \cdot f_c)$ igual a 0,2, a tensão real se limitou a uma média de 0,17 quando havia armadura de costura. Isso reforça a importância de limitar a tensão de dimensionamento. El Debs (2017) sugere que esse valor seja limitado a 0,17, enquanto o ACI 318:2019 recomenda 0,2. No entanto, os resultados numéricos corroboraram com El Debs (2017) que o valor ideal é 0,17.

De modo geral, observa-se que a presença da armadura de costura contribuiu para o aumento da ductilidade e da resistência, mas apenas nos dentes submetidos a maiores tensões de cisalhamento, pois somente nesses casos o melhor confinamento da biela resultou em maior resistência. Ainda assim, independentemente do caso, o controle da propagação de fissuras foi aprimorado com a adoção da armadura de costura.

5.7.2 Resultados da análise em função das propriedades do concreto

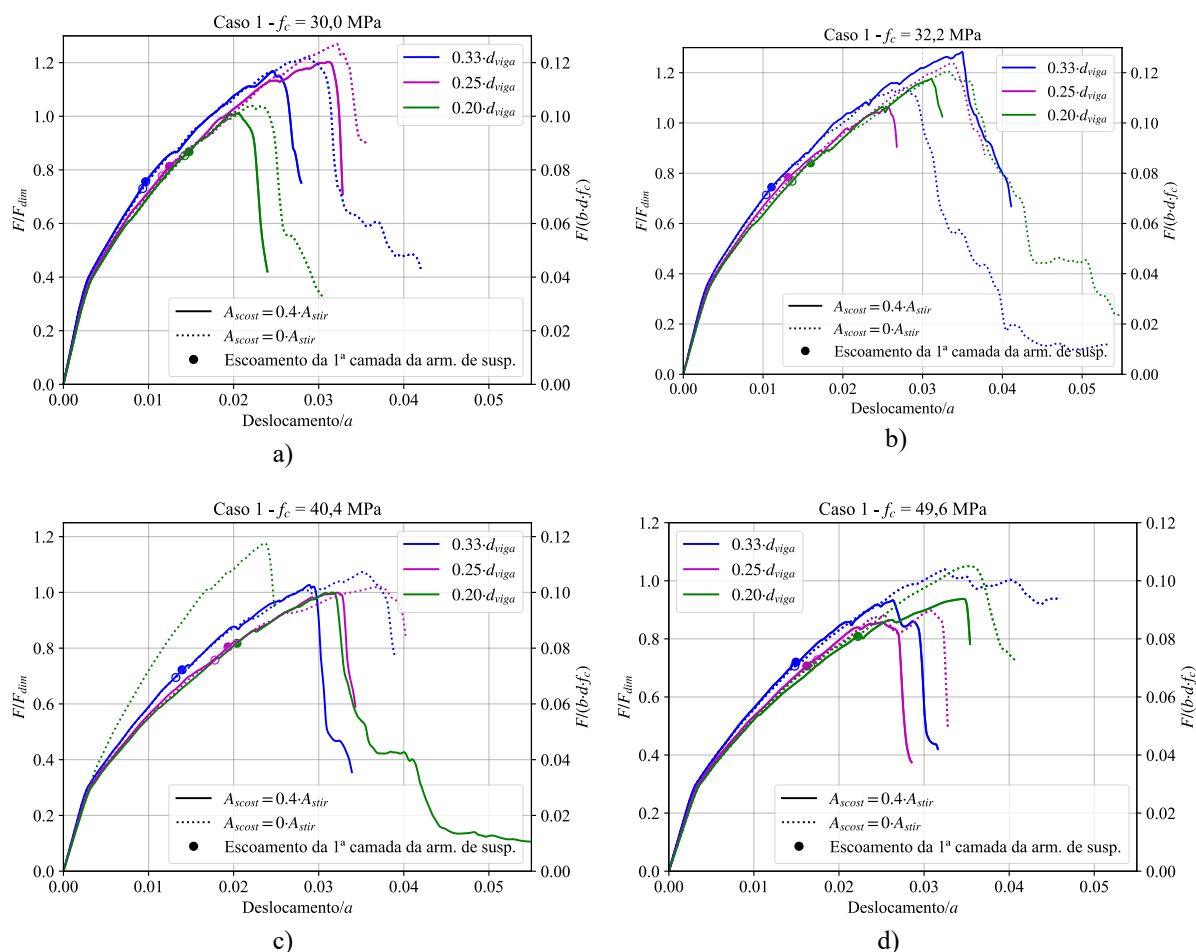
Para avaliar o efeito da armadura de costura sob diferentes espalhamentos da armadura de suspensão e das propriedades do concreto, considerou-se o dente com a_e/d igual 0,60. As propriedades do concreto adotadas para esta análise seguiram as especificações do DEB-1.7 e do DEB-1.8 de Falcón, Pallarés e Miguel (2019), com resistências à compressão de 30,0 MPa e 32,2 MPa, respectivamente, além do modelo OL8 de Rajapakse, Degée e Mihaylov (2022), com resistência à compressão igual a 49,6 MPa.

Nos Casos 1, 2 e 3, o dente com f_c igual a 30,0 MPa foi dimensionado para as cargas de 187,5 kN, 281,25 kN e 375,0 kN, respectivamente. Para o dente com f_c igual 32,2 MPa, as cargas de dimensionamento foram de 201,25 kN, 301,88 kN e 402,5 kN, respectivamente. Já o dente com f_c igual 49,6 MPa foi dimensionado para as cargas de 281,67 kN, 465,0 kN e 620,0 kN, respectivamente.

As curvas de força x deslocamento, com e sem armadura de costura e para diferentes espalhamentos de armadura de suspensão, obtidas para os Casos de dimensionamento 1, 2 e 3,

estão apresentadas na Figura 73, Figura 74 e Figura 75, respectivamente, para as diferentes propriedades do concreto.

Figura 73 – Influência das armaduras de costura na carga última para o dente com $a_e/d = 0,60$ com f_c igual a: a) 30,0 MPa, b) 32,2 MPa, c) 40,4 MPa, d) 49,6 MPa – Caso 1



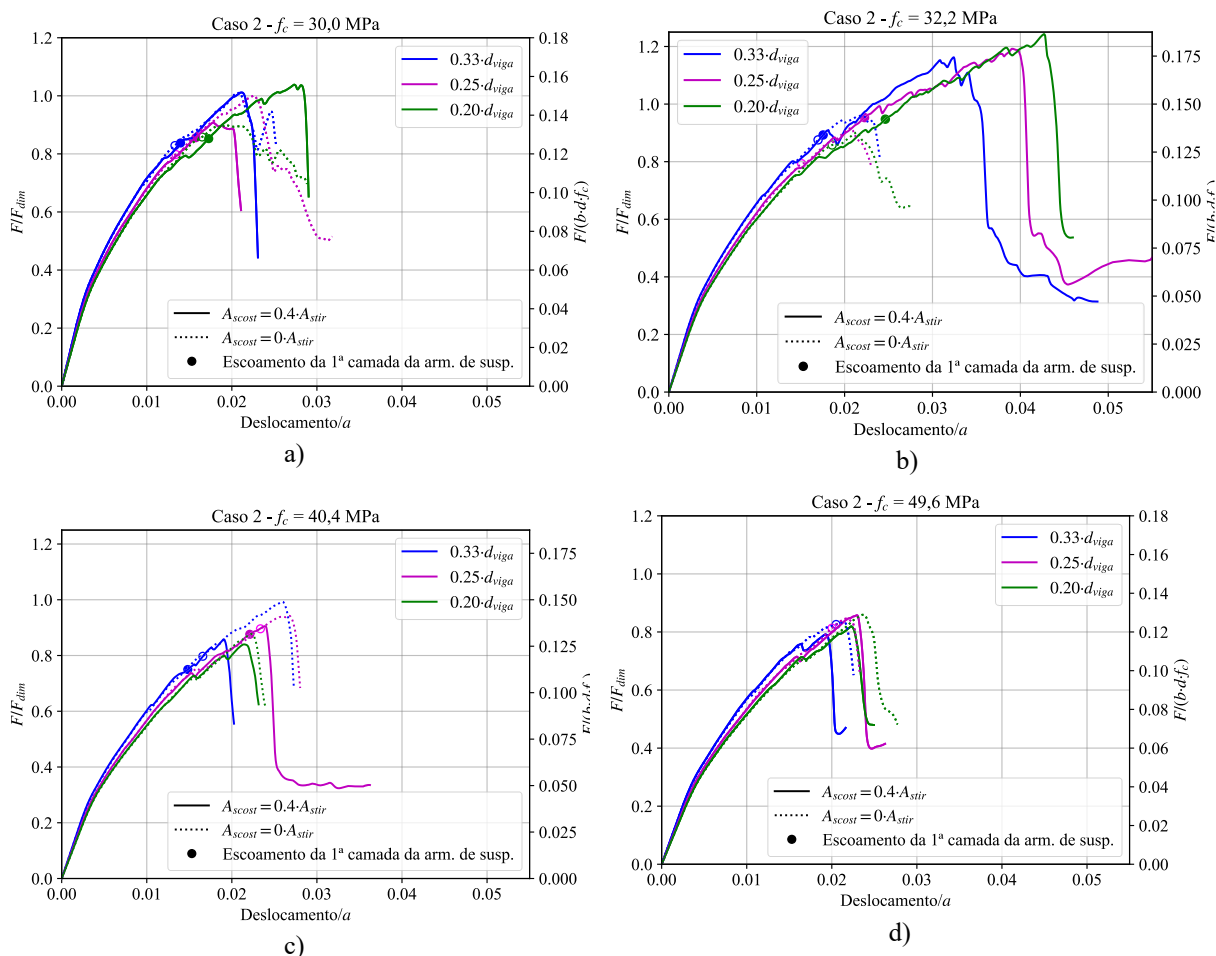
Fonte: Autora

No Caso 1, observou-se o escoamento da armadura de suspensão na maioria dos casos. Isso não ocorreu, no entanto, na ausência da armadura de costura para o espalhamento de $0,20d_{viga}$ na viga com f_c igual a 40,4 MPa e para todos os espalhamentos sem armadura de costura na viga com f_c igual a 49,6 MPa. Essas exceções indicam que, em algumas situações, a ausência de armadura de costura pode afetar o comportamento do escoamento da armadura de suspensão.

Além disso, as curvas de força x deslocamento no Caso 1 demonstram uma influência perceptível da presença ou ausência da armadura de costura no intervalo de espalhamento da armadura de suspensão analisado. De maneira geral, independentemente da resistência à

compressão do concreto, assim como na análise anterior quanto à geometria, as curvas obtidas sem armadura de costura indicam um comportamento ligeiramente mais dúctil e resistente. No entanto, a armadura de costura continua a desempenhar um papel importante ao controlar a propagação das fissuras.

Figura 74 – Influência das armaduras de costura na carga última para o dente com $a_e/d = 0,60$ com f_c igual a: a) 30,0 MPa, b) 32,2 MPa, c) 40,4 MPa, d) 49,6 MPa – Caso 2

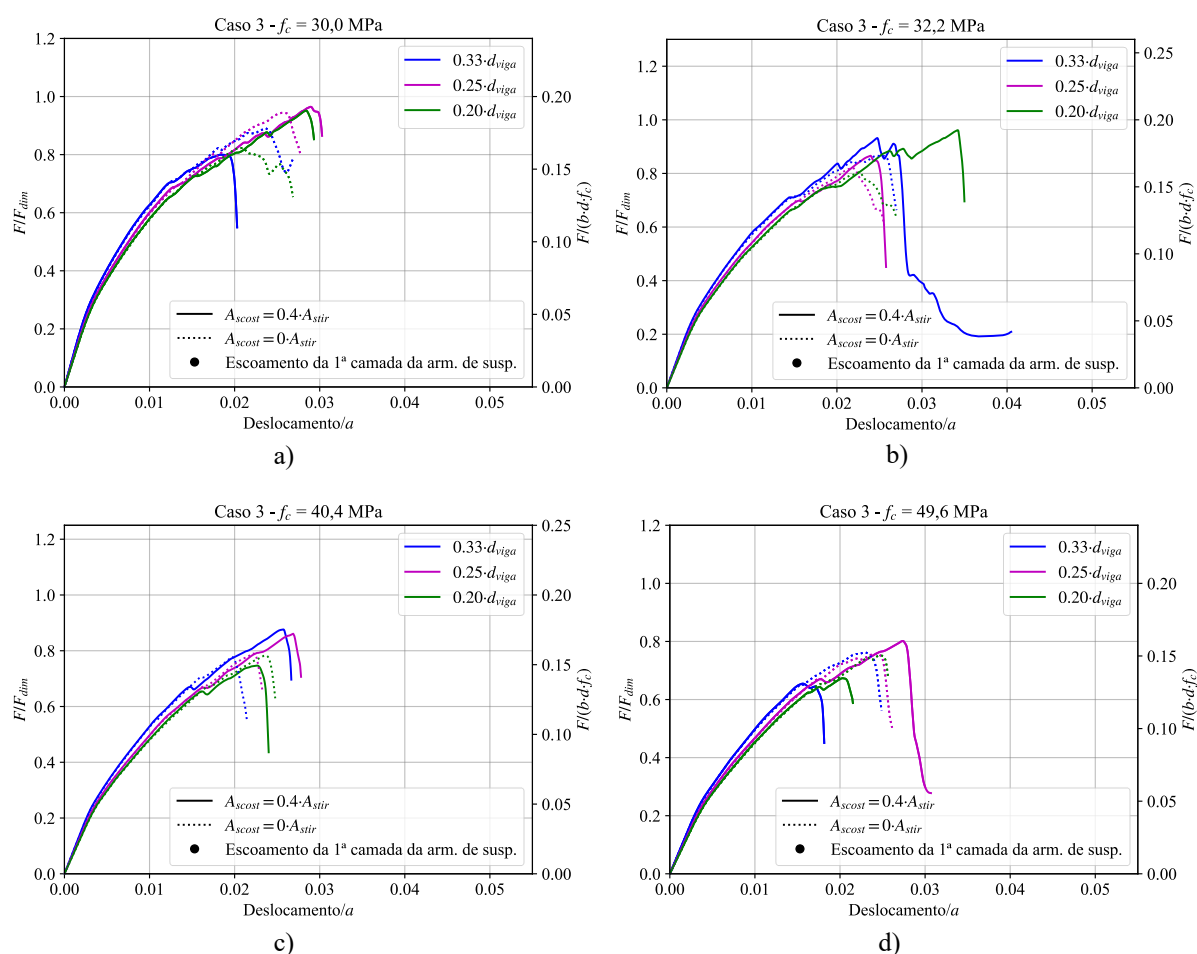


Fonte: Autora

Por outro lado, no Caso 2, a armadura de suspensão novamente não escoou para o espalhamento de $0,20d_{viga}$ da viga com f_c de 40,4 MPa. A novidade, no entanto, foi que, para a viga com f_c de 49,6 MPa, a armadura de suspensão não escoou em nenhum dos casos de espalhamento quando havia armadura de costura. Curiosamente, na ausência da armadura de costura, o escoamento da armadura de suspensão não ocorreu apenas no espalhamento de $0,20d_{viga}$.

Nos modelos com f_c iguais a 30,0 MPa e 32,2 MPa, os dentes com armadura de costura apresentaram comportamento mais dúctil e resistente. No entanto, o comportamento foi inverso nas vigas com f_c de 40,4 MPa e 49,6 MPa. De maneira geral, é perceptível que as rupturas no Caso 2 foram mais frágeis do que no Caso 1. Além disso, assim como no Caso 1, a armadura de costura contribuiu para um maior controle da propagação de fissuras.

Figura 75 – Influência das armaduras de costura na carga última para o dente com $a_e/d = 0,60$ com f_c igual a: a) 30,0 MPa, b) 32,2 MPa, c) 40,4 MPa, d) 49,6 MPa – Caso 3



Fonte: Autora

Como era esperado, em todas as simulações do Caso 3, não ocorreu escoamento da armadura de suspensão, e as rupturas se deram por compressão do concreto na região do dente de forma frágil. De maneira geral, com algumas exceções, observou-se que, nos modelos com f_c iguais a 30,0 MPa e 32,2 MPa, os dentes com armadura de costura apresentaram um comportamento ligeiramente mais dúctil e resistente. Em contrapartida, o comportamento foi inverso nas vigas com f_c de 40,4 MPa e 49,6 MPa.

De forma geral, independentemente do caso de dimensionamento, a tendência de que a resistência das vigas com dentes de concreto aumenta com a resistência à compressão do concreto foi novamente confirmada. No entanto, nota-se um decréscimo significativo na resistência final dos modelos quando comparada à expectativa de dimensionamento. Esse fenômeno pode ser observado na Tabela 38, Tabela 39 e Tabela 40, nas quais estão apresentadas as forças últimas obtidas para cada espalhamento da armadura de suspensão analisado, considerando as diferentes propriedades do concreto, com e sem armadura de costura, para cada caso de dimensionamento, respectivamente.

Tabela 38 – Força última em função do espalhamento da armadura de suspensão para diferentes valores de f_c no dente com $a_e/d = 0,6$ – Caso 1

Caso 1 - $F_{dim}/(b \cdot d \cdot f_c) = 0,1$	$A_{s,cost} = 0,4 \cdot A_{s,tir}$				$A_{s,cost} = 0 \cdot A_{s,tir}$			
	30,0	32,2	40,4	49,6	30,0	32,2	40,4	49,6
Espalhamento / f_c (MPa)								
0,33 d_{viga}	219,06	258,20	259,35	289,14	228,65	229,05	271,13	322,35
0,25 d_{viga}	225,49	213,62	252,27	265,57	237,96	249,06	257,26	278,23
0,20 d_{viga}	189,41	236,44	252,40	291,19	195,07	242,56	296,99	325,61
$F_{última}$	211,32	236,08	254,68	281,96	220,56	240,22	275,13	308,73
Média $F_{última}/F_{dim}$	1,13	1,17	1,01	1,00	1,18	1,19	1,09	1,10
$F_{última}/(b \cdot d \cdot f_c)$	0,11	0,12	0,10	0,10	0,12	0,12	0,11	0,11

Fonte: Autora

Tabela 39 – Força última em função do espalhamento da armadura de suspensão para diferentes valores de f_c no dente com $a_e/d = 0,6$ – Caso 2

Caso 2 - $F_{dim}/(b \cdot d \cdot f_c) = 0,15$	$A_{s,cost} = 0,4 \cdot A_{s,tir}$				$A_{s,cost} = 0 \cdot A_{s,tir}$			
	30,0	32,2	40,4	49,6	30,0	32,2	40,4	49,6
Espalhamento / f_c (MPa)								
0,33 d_{viga}	284,46	350,93	325,11	368,16	284,13	289,99	375,91	388,37
0,25 d_{viga}	255,48	359,85	342,94	398,83	281,42	276,77	356,87	393,37
0,20 d_{viga}	292,13	375,24	318,11	381,12	253,33	272,04	332,26	399,53
$F_{última}$	277,36	362,01	328,72	382,70	272,96	279,60	355,01	393,76
Média $F_{última}/F_{dim}$	0,99	1,20	0,87	0,82	0,97	0,93	0,94	0,85
$F_{última}/(b \cdot d \cdot f_c)$	0,15	0,18	0,13	0,12	0,15	0,14	0,14	0,13

Fonte: Autora

Tabela 40 – Força última em função do espalhamento da armadura de suspensão para diferentes valores de f_c no dente com $a_e/d = 0,6$ – Caso 3

Caso 3 - $F_{dim}/(b \cdot d \cdot f_c) = 0,2$	$A_{s,cost} = 0,4 \cdot A_{s,tir}$				$A_{s,cost} = 0 \cdot A_{s,tir}$			
	30,0	32,2	40,4	49,6	30,0	32,2	40,4	49,6
Espalhamento / f_c (MPa)								
0,33 d_{viga}	299,92	375,15	442,60	405,91	334,15	348,89	392,78	472,95
0,25 d_{viga}	361,74	348,54	434,79	496,92	354,06	330,05	398,91	470,23
0,20 d_{viga}	356,87	387,05	377,21	417,63	308,70	323,78	395,40	466,54
$F_{última}$	339,51	370,25	418,20	440,16	332,30	334,24	395,70	469,91
Média $F_{última}/F_{dim}$	0,91	0,92	0,83	0,71	0,89	0,83	0,78	0,76
$F_{última}/(b \cdot d \cdot f_c)$	0,18	0,18	0,17	0,14	0,18	0,17	0,16	0,15

Fonte: Autora

De modo geral, observa-se que, ao considerar a armadura de costura no Caso 1, o erro $F_{última}/F_{dim}$ variou de 1,00 a 1,13, a depender das propriedades do concreto adotadas no dimensionamento. No Caso 2, a razão $F_{última}/F_{dim}$ variou de 0,82 a 1,20. Para o Caso 3, o erro variou de 0,71 a 0,92. Assim, a tensão média na região do dente, $F_{última}/(b \cdot d \cdot f_c)$, para o dente com a_e/d igual a 0,60, resultou em 0,11, 0,15 e 0,17 para os Casos 1, 2 e 3, respectivamente.

Quando não havia armadura de costura, no Caso 1, a razão $F_{última}/F_{dim}$ variou de 1,09 a 1,19. No Caso 2, a razão $F_{última}/F_{dim}$ variou de 0,85 a 0,97. No Caso 3, a força última atingida correspondeu entre 0,76 e 0,89 da força utilizada no dimensionamento. Dessa forma, a tensão média na região do dente, $F_{última}/(b \cdot d \cdot f_c)$, resultou em 0,11, 0,14 e 0,16 para os Casos 1, 2 e 3, respectivamente.

Novamente, no Caso 3, observa-se que, apesar de ter sido dimensionado para uma tensão de cisalhamento adimensional $F_{dim}/(b \cdot d \cdot f_c)$ igual a 0,2, a tensão que de fato foi alcançada se limitou a uma média de 0,17 quando havia armadura de costura. Esse comportamento já havia sido observado anteriormente, reforçando a importância de limitar a tensão de dimensionamento ao valor sugerido por El Debs (2017), que é 0,17.

Em relação ao espalhamento da armadura de suspensão, observa-se que não houve um padrão claro de mudança no comportamento estrutural dentro do intervalo analisado, o que já era esperado. Assim, sob as condições avaliadas, reforça-se a conclusão de que o detalhamento da armadura de suspensão não exerce uma influência significativa no desempenho do dente quando a armadura é distribuída até $0,33d_{viga}$.

5.8 Verificação das tensões de compressão no concreto

Realizou-se um estudo sobre a configuração do modelo de bielas e tirantes, levando em consideração o espalhamento da armadura de suspensão. Especificamente, analisou-se a influência exercida na região nodal da extremidade oposta ao apoio do dente. Para isso, foram consideradas as vigas com a_e/d iguais a 0,22 e 0,60, nas quais a armadura de suspensão estava distribuída em faixas de $0,10d_{viga}$, $0,25d_{viga}$ e $0,50d_{viga}$.

As propriedades do concreto utilizadas foram as correspondentes ao modelo DEB-1.4 de Falcón, Pallarés e Miguel (2019), cuja resistência à compressão do concreto, f_c , foi de 40,4 MPa.

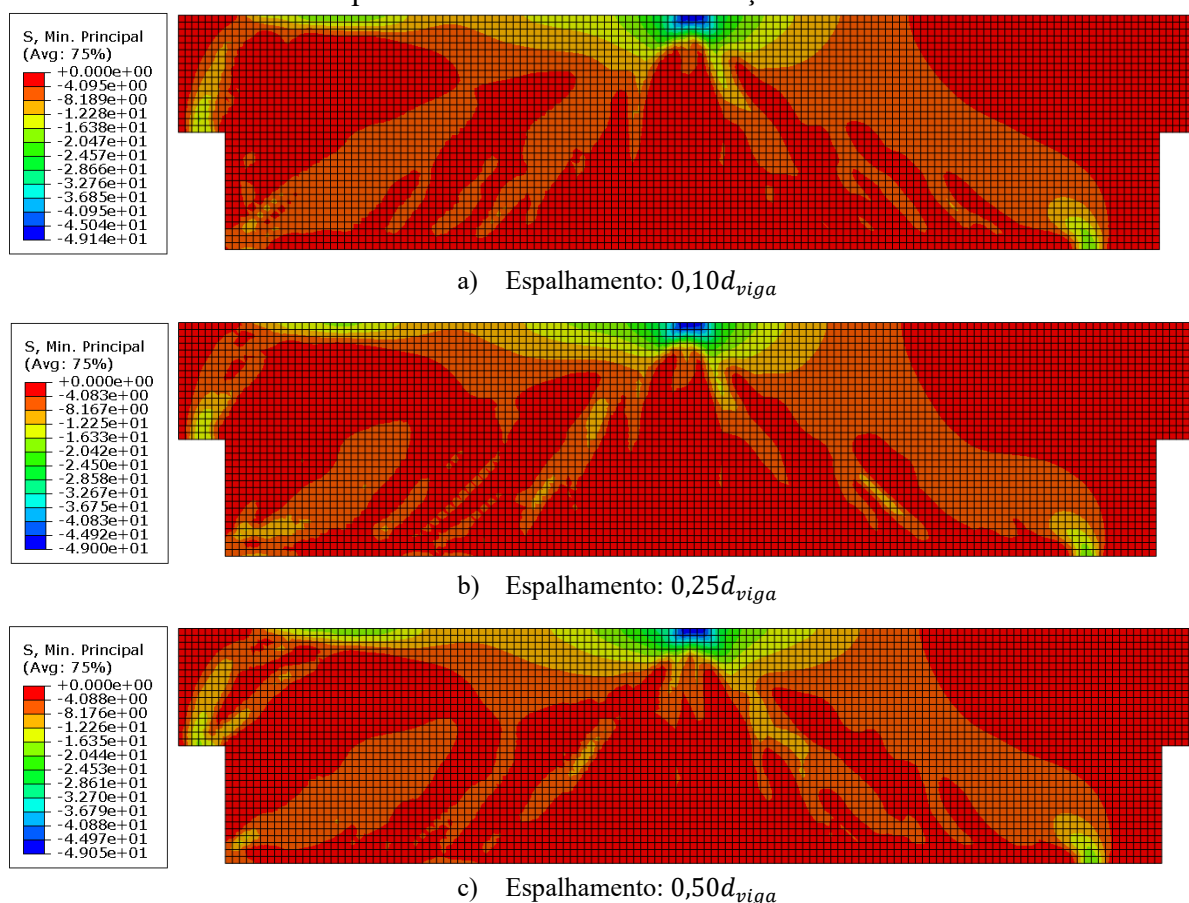
5.8.1 Resultados da análise da tensão de compressão no concreto

É possível observar a formação das principais bielas ao analisar as tensões principais mínimas no concreto. Os resultados para os dentes com razões a_e/d iguais a 0,22 e 0,60, para os espalhamentos de $0,10d_{viga}$, $0,25d_{viga}$ e $0,50d_{viga}$, no instante da força última, estão apresentados na Figura 76 e na Figura 77, respectivamente.

Nota-se que, conforme o esperado, à medida que o espalhamento da armadura de suspensão aumentava, a largura da biela na região do dente também aumentava. Além disso, observa-se que a inclinação dessa biela tendia a aumentar conforme a armadura se desconcentrava.

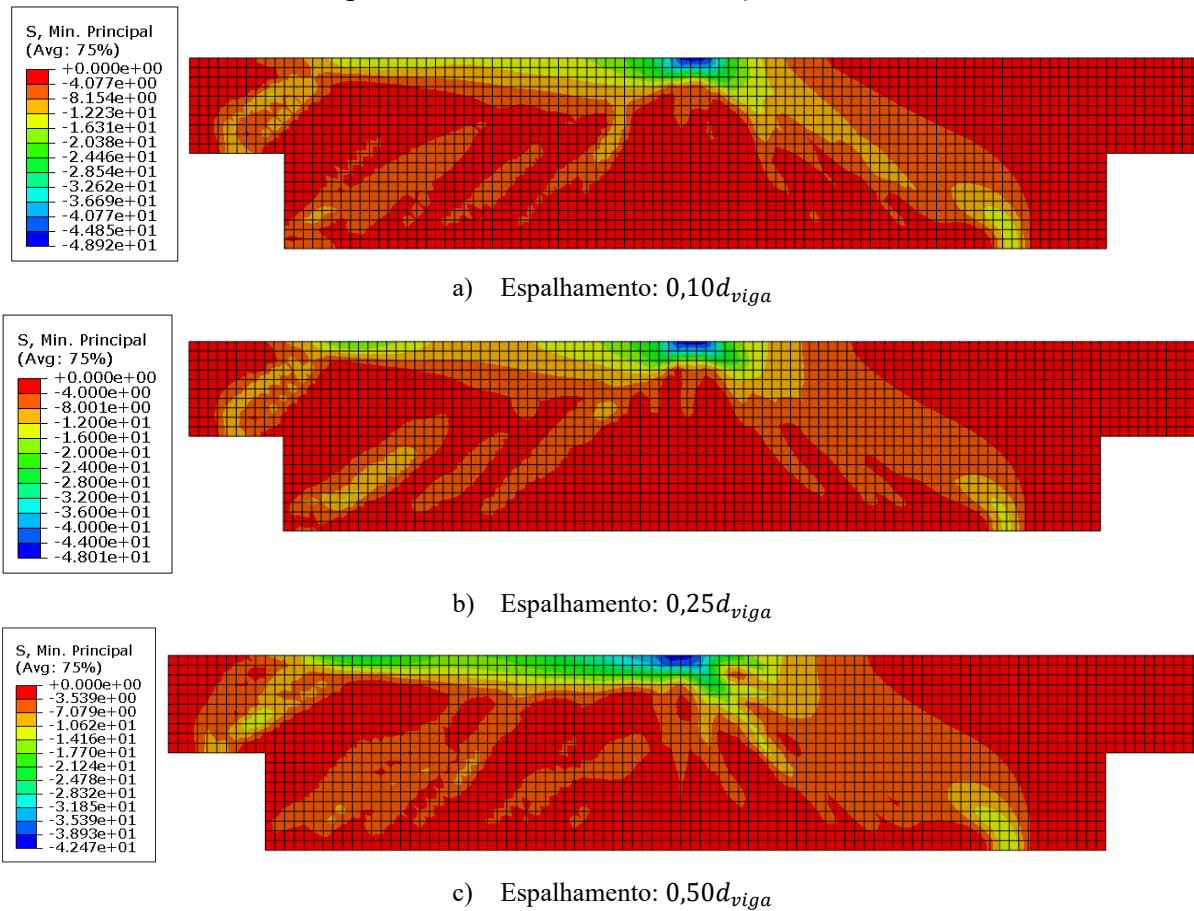
Dessa forma, nota-se que o modelo de bielas e tirantes não se aplica adequadamente quando a armadura de suspensão está excessivamente espalhada (Figura 76c e Figura 77c). Esse comportamento fica ainda mais evidente para os dentes mais curtos ($a_e/d = 0,22$). Nesse caso, a biela bifurca-se, comprometendo a eficácia do modelo.

Figura 76 – Tensão de compressão no concreto da viga com dente $a_e/d = 0,22$ para diferentes espalhamentos no instante de força última



Fonte: Autora

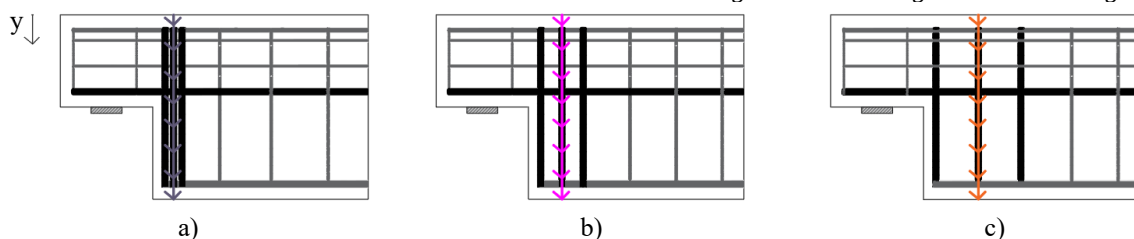
Figura 77 – Tensão de compressão no concreto da viga com dente $a_e/d = 0,6$ para diferentes espalhamentos no instante de força última



Fonte: Autora

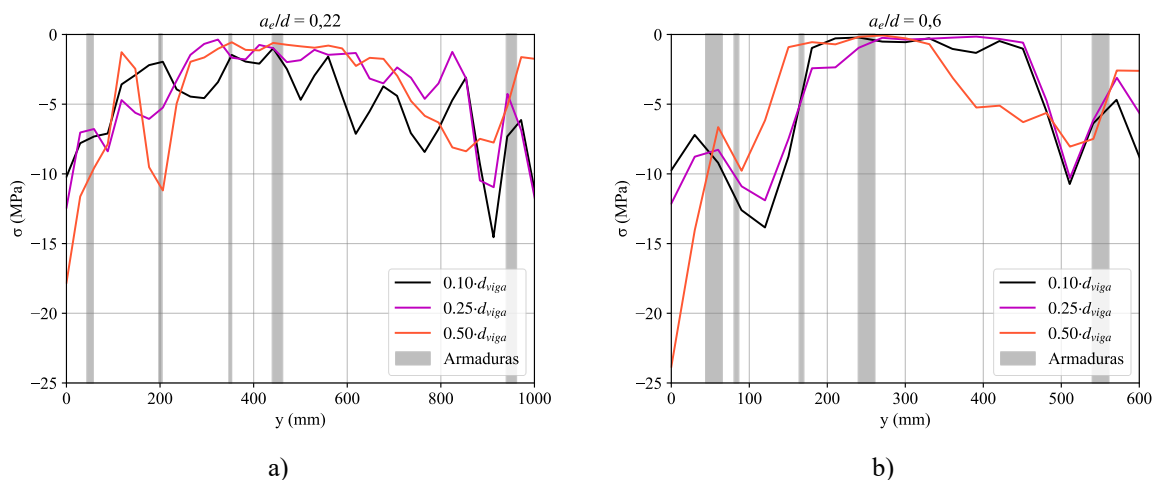
Para realizar uma análise mais detalhada do comportamento das tensões no concreto, investigou-se a distribuição de tensões de compressão ao longo da altura da viga, na seção transversal correspondente à posição da segunda camada da armadura de suspensão, para os três espalhamentos. Os caminhos utilizados para a análise estão representados na Figura 78, e os resultados obtidos estão apresentados na Figura 79.

Figura 78 – Caminhos utilizados para análise da tensão de compressão no concreto ao longo da seção da viga para os espalhamentos de a) $0,10d_{viga}$, b) $0,25d_{viga}$ e c) $0,50d_{viga}$



Fonte: Autora

Figura 79 – Tensões de compressão no concreto ao longo da altura da viga no instante de força última para dente com a_e/d igual a a) 0,22 e b) 0,60



Fonte: Autora

Observa-se que, na extremidade superior da viga ($y=0$), a tensão de compressão no concreto, resultante da flexão da viga, aumentou à medida que o espalhamento da armadura de suspensão aumentava. Isso ocorre porque, com o aumento do espalhamento, a segunda camada da armadura de suspensão se torna mais próxima do ponto de aplicação da carga, onde há uma maior concentração de tensão.

Além disso, nota-se que houve um pico de tensão em uma altura aproximada de $y=200$ mm na viga com a_e/d igual a 0,22. Já na viga com a_e/d igual a 0,60, esse pico de tensão ocorreu em aproximadamente $y=100$ mm. Em ambos os casos, a concentração de tensão se localiza entre as camadas da armadura de costura. Nesse intervalo, para a viga com a_e/d igual a 0,22, as tensões de compressão aumentaram à medida que a armadura de suspensão se concentrava, enquanto para a viga com a_e/d igual a 0,60, o contrário aconteceu.

De maneira geral, observa-se que as tensões de compressão na viga com a_e/d igual a 0,60 foram maiores do que com a_e/d igual a 0,22. Isso ocorreu porque a viga com a_e/d igual a 0,60 possui uma altura de dente menor, o que resulta em uma menor largura e área da biela. Como a tensão é inversamente proporcional à área, dentes com alturas menores apresentam maiores concentrações de tensão.

Além disso, teoricamente, à medida que o espalhamento aumenta, a tensão de compressão no nó superior da biela na região do dente diminui. Isso ocorre porque, com o aumento do espalhamento e da distância a , a largura da biela se amplia, o que leva a uma diminuição da tensão de compressão. No entanto, ao observar o nó superior da biela, nota-se, a

partir da Figura 79, que isso ocorreu no dente com a_e/d igual a 0,6, mas não no de a_e/d igual a 0,22.

Para realizar uma análise mais detalhada da tensão de compressão na região onde a biela intersecta a armadura de suspensão do dente, foi verificado o valor da tensão no concreto em cada uma das camadas da armadura de suspensão. Os resultados obtidos para os dentes com a_e/d iguais a 0,22 e 0,6, considerando diferentes espalhamentos, estão apresentados, respectivamente, na Tabela 41 e na Tabela 42.

Tabela 41 – Tensão de compressão na região nodal superior da biela do dente com $a_e/d = 0,22$ para diferentes espalhamentos no instante de força última

Espalhamento	Tensão de compressão no concreto no nó (MPa)		
	1ª camada	2ª camada	3ª camada
$0,10d_{viga}$	8,85	7,10	5,00
$0,25d_{viga}$	5,27	8,29	3,03
$0,50d_{viga}$	6,94	7,87	5,83

Fonte: Autora

Tabela 42 – Tensão de compressão na região nodal superior da biela do dente com $a_e/d = 0,6$ para diferentes espalhamentos no instante de força última

Espalhamento	Tensão de compressão no concreto no nó (MPa)		
	1ª camada	2ª camada	3ª camada
$0,10d_{viga}$	11,32	12,60	12,53
$0,25d_{viga}$	9,27	11,15	2,18
$0,50d_{viga}$	12,65	9,78	0,91

Fonte: Autora

Observa-se que, na viga com a_e/d igual a 0,22, para o espalhamento de $0,10d_{viga}$, a tensão de compressão no concreto variou entre 5,00 MPa e 8,85 MPa, com maior concentração na região que intercepta a primeira camada da armadura de suspensão, uma vez que a biela se aproximou de uma configuração quase ortogonal. Para os demais espalhamentos, a tensão de compressão se concentrou mais na segunda camada, embora a diferença entre as camadas não tenha sido tão expressiva. Esse comportamento ocorreu devido à bifurcação da biela, que se tornou mais pronunciada à medida que o espalhamento aumentava.

Já na viga com a_e/d igual a 0,6, para o espalhamento de $0,10d_{viga}$, a região nodal da biela apresentou uma tensão de compressão no concreto variando entre 11,32 MPa e 12,60 MPa, com uma menor variação entre as camadas, indicando uma distribuição da tensão mais uniforme. Em contraste, para o maior espalhamento, $0,50d_{viga}$, a maior concentração de tensão

de compressão ocorreu no nó correspondente à primeira camada da armadura de suspensão, com um valor de 12,65 MPa. Por outro lado, o nó referente à última camada da armadura de suspensão apresenta uma tensão no concreto de apenas 0,91 MPa, representando apenas 7% do valor observado na região da armadura mais concentrada.

Assim, conclui-se que o espalhamento da armadura de suspensão influencia diretamente a distribuição das tensões de compressão no concreto. De maneira geral, as maiores concentrações de tensão ocorrem entre a primeira e segunda camada da armadura de suspensão, especialmente quando os espalhamentos são menores. Além disso, observa-se que, para maiores espalhamentos, o modelo de bielas e tirantes é prejudicado, resultando em uma bifurcação da biela principal.

5.8.2 Análise da verificação das tensões de compressão no concreto proposta por Silva (2017)

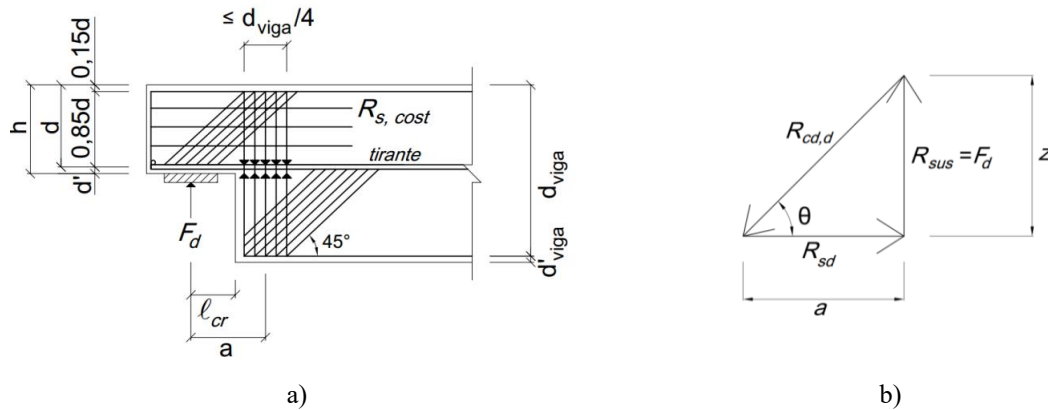
A ABNT NBR 9062:2017 estabelece a necessidade de verificar a tensão de compressão no concreto utilizando o modelo de bielas e tirantes apresentado anteriormente na Figura 15. No entanto, as dimensões e a inclinação da biela de compressão são variáveis calculadas a partir de suposições, uma vez que não existe um procedimento claro para o seu cálculo. Nesse contexto, Silva (2017) propôs uma verificação da tensão de compressão na região do dente, em conformidade com as diretrizes da ABNT NBR 9062:2017, baseada nos estudos de Mattock (2012), Mattock e Chan (1979), Yang, Ashour e Lee (2011), ACI 318:2014, European Concrete Platform ASBL (2008), Sanders (2002) e Wight e MacGregor (2012).

A tensão solicitante, σ_s , na biela de compressão na região do dente, pode ser obtida pela seguinte expressão:

$$\sigma_s = \frac{R_c}{A_{bie}} = \frac{R_c}{b \cdot h_{bie}} \quad (100)$$

Onde R_c é a resultante de compressão, que atua na biela na região do dente, e A_{bie} é a área mínima da seção da biela de compressão. A resultante de compressão depende do ângulo de inclinação da biela θ , que é uma das variáveis a serem supostas na etapa de projeto segundo a ABNT NBR 9062:2017. Na proposta de Silva (2017), o braço de alavanca z para o dente é igual a $0,85d$, como indicado por Leonhardt e Mönnig (1978).

Figura 80 – a) Definições geométricas e b) sistema de forças para cálculo da resultante de compressão na região do dente, conforme proposta de Silva (2017)



Fonte: Silva (2017), adaptado da ABNT NBR 9062:2017

Portanto, considerando a Figura 80, a resultante de compressão R_c é dada por:

$$R_c = \frac{F}{\text{sen}(\theta)} \quad (101)$$

Onde:

$$\theta = \text{arctg}\left(\frac{z}{a}\right) = \text{arctg}\left(\frac{0,85d}{a}\right) \quad (102)$$

Para calcular a área da seção da biela de compressão, é necessário calcular a largura da biela. Para isso, deve-se calcular a largura nas regiões nodais da biela, tanto no apoio do dente, $h_{bie,1}$, quanto na região oposta, $h_{bie,2}$, onde a biela “se apoia”. Segundo a proposta de Silva (2017), seguindo recomendações do ACI 318:2014, European Concrete Platform ASBL (2008), Sanders (2002) e Wight e MacGregor (2012), deve ser adotado o menor valor entre:

$$h_{bie,1} = 2 \cdot d \cdot \cos\theta + l_a \cdot \text{sen}\theta \quad (103)$$

$$h_{bie,2} = 0,3 \cdot d \cdot \cos\theta + 2 \cdot (a - l_{cr}) \cdot \text{sen}\theta \quad (104)$$

Onde l_a é o comprimento do aparelho de apoio do dente e l_{cr} é a distância entre o ponto de aplicação da força vertical e o canto reentrante do dente de concreto.

Segundo a ABNT NBR 9062:2017, a tensão solicitante não pode ultrapassar a tensão resistente, que, segundo ABNT NBR 6118:2023, para uma região nodal onde conflui um tirante, é dada pela Equação (10).

A fim de comparar os resultados obtidos numericamente para a tensão de compressão no concreto com os valores calculados analiticamente, a tensão foi calculada para a força última dos dentes com a_e/d iguais a 0,22, 0,28, 0,33, 0,40, 0,50 e 0,60 (apresentados anteriormente na Figura 57), dimensionados pelo Caso 1, para os espalhamentos de $0,10d_{viga}$, $0,25d_{viga}$ e $0,50d_{viga}$. Os resultados analíticos para a região "de chegada" da biela, oposta ao apoio do dente, foram comparados com os numéricos da posição da segunda camada da armadura de suspensão. Os resultados alcançados, conforme a proposta, estão apresentados na Tabela 43.

Tabela 43 – Comparação entre os resultados numéricos e analíticos segundo Silva (2017) de tensão de compressão no concreto

a_e/d	Espalhamento	$F_{última}$ (kN)	a (mm)	d (mm)	l_{cr} (mm)	θ (rad)	$h_{bie,2}$ (mm)	R_c (kN)	σ_s (MPa)	σ_{num} (MPa)	$\frac{\sigma_{num}}{\sigma_s}$
0,22	$0,10d_{viga}$	466,10	187,5	450	100	1,115	216,6	519,1	9,59	7,10	0,74
	$0,25d_{viga}$	446,16	258,75	450	100	0,976	338,6	538,9	6,36	8,29	1,30
	$0,50d_{viga}$	469,09	377,5	450	100	0,792	489,9	659,1	5,38	7,87	1,46
0,28	$0,10d_{viga}$	461,20	212,5	450	125	1,064	218,5	527,6	9,66	6,68	0,69
	$0,25d_{viga}$	460,35	283,75	450	125	0,933	335,4	573,2	6,84	10,25	1,50
	$0,50d_{viga}$	448,19	402,5	450	125	0,760	480,2	650,6	5,42	7,13	1,32
0,33	$0,10d_{viga}$	428,20	237,5	450	150	1,015	219,9	504,0	9,17	5,79	0,63
	$0,25d_{viga}$	469,29	308,75	450	150	0,892	331,9	603,1	7,27	11,93	1,64
	$0,50d_{viga}$	452,75	427,5	450	150	0,730	470,7	679,0	5,77	6,16	1,07
0,40	$0,10d_{viga}$	251,53	167,5	250	100	0,903	152,5	320,3	8,40	10,96	1,30
	$0,25d_{viga}$	284,19	208,75	250	100	0,794	207,7	398,4	7,67	10,73	1,40
	$0,50d_{viga}$	276,36	277,5	250	100	0,654	275,4	454,5	6,60	3,91	0,59
0,50	$0,10d_{viga}$	228,87	192,5	250	125	0,835	150,4	308,8	8,21	10,61	1,29
	$0,25d_{viga}$	285,15	233,75	250	125	0,738	201,8	423,9	8,40	11,23	1,34
	$0,50d_{viga}$	250,12	302,5	250	125	0,612	265,4	435,1	6,56	7,13	1,09
0,60	$0,10d_{viga}$	266,67	217,5	250	150	0,774	148,0	381,6	10,31	12,60	1,22
	$0,25d_{viga}$	252,27	258,75	250	150	0,688	196,0	397,5	8,11	11,15	1,37
	$0,50d_{viga}$	264,24	327,5	250	150	0,576	256,2	485,5	7,58	9,78	1,29
										Média	1,18
										CV	27%

Fonte: Autora

Em seu estudo, Silva (2017) mostrou que a força de ruína por ruptura do concreto na região do dente, de acordo com sua proposta, estimou em 1,33 a força de ruína experimental de modelos que sofreram esse tipo de falha.

Os resultados obtidos no presente estudo, para os dentes que sofreram escoamento da armadura de suspensão, aplicando a proposta de Silva (2017), apresentaram uma média de 1,18,

com um coeficiente de variação de 27%, quando comparados com os resultados numéricos. Ao desconsiderar os dentes com armadura de suspensão espalhada em $0,50d_{vig}$, devido às inconsistências do modelo já discutidas anteriormente, a média passou para 1,20, mantendo o coeficiente de variação em 27%.

A partir dos resultados obtidos por meio da verificação proposta por Silva (2017), observa-se que, como esperado, à medida que o espalhamento aumentou, a tensão de compressão no nó superior da biela diminuiu, devido ao aumento na largura da biela.

Além disso, foi possível perceber que para os dentes com razão a_e/d iguais a 0,22, 0,28 e 0,33, e altura útil de 450 mm, as tensões de compressão na região superior da biela foram menores do que aquelas alcançadas numericamente. Isso indicou uma tendência de subestimação das tensões de compressão. Tal comportamento pode ser atribuído à concentração de tensões, que estava mais restrita à posição da primeira camada da armadura de suspensão, e não à segunda camada, com a qual a comparação foi realizada, conforme discutido anteriormente com base na Tabela 41.

Mesmo assim, considerando a complexidade do problema, a proposta de Silva (2017) estimou satisfatoriamente a tensão de compressão no concreto nas regiões dos dentes analisados.

6 CONCLUSÕES

Este trabalho teve como objetivo contribuir para o projeto e o dimensionamento de dentes de concreto armado por meio de modelagens numéricas. Para isso, foram realizadas investigações utilizando análises com o software de elementos finitos Abaqus, com o intuito de compreender o impacto de diferentes variáveis de detalhamento no comportamento estrutural desses elementos. Diante dos resultados obtidos, é possível destacar as seguintes conclusões:

- Quanto aos resultados obtidos pelo modelo numérico e pelos modelos analíticos:

O modelo numérico desenvolvido foi calibrado com base na reprodução do comportamento observado nos experimentos realizados por Falcón, Palláres e Miguel (2019), Rajapakse, Degée e Mihaylov (2022) e Lu, Lin e Yu (2012). Inicialmente, de modo geral, o modelo apresentou uma razão entre a força última prevista numericamente e a força última experimental igual a 1,23, com um coeficiente de variação de 31%. Essa dispersão está associada, principalmente, aos ensaios em que a ruptura foi governada pelo esmagamento da biela, pois apresentam comportamento mais complexo e de difícil representação. Observou-se, no entanto, que o modelo numérico demonstrou sensibilidade ao parâmetro de cisalhamento experimental $F_{exp}/(b \cdot d \cdot f_c)$, já que o erro de modelo aumentava com o crescimento desse parâmetro. Após a introdução de uma correção relacionada ao parâmetro de cisalhamento, a razão entre a força última numérica e a experimental foi ajustada para 1,00, com um coeficiente de variação de 14%, desempenho considerado satisfatório.

Além da análise numérica, realizou-se uma análise do nível de precisão de modelos analíticos para a previsão do comportamento estrutural dos dentes de concreto. A força de ruína dos elementos ensaiados por Falcón, Palláres e Miguel (2019), Rajapakse, Degée e Mihaylov (2022) e Lu, Lin e Yu (2012) foi estimada a partir de: (i) ABNT NBR 9062:2017 e ABNT NBR 6118:2023, (ii) El Debs (2017), (iii) ACI 318:2019 e (iv) EN 1992-1-1:2010.

Para os dentes que sofreram ruína por escoamento da armadura do tirante, os procedimentos analíticos apresentaram médias próximas à unidade, com valores entre 1,05 e 1,12 e coeficientes de variação em torno de 16%, indicando boa concordância com os resultados experimentais. O modelo numérico, após correção quanto ao parâmetro de cisalhamento, apresentou a média mais próxima da unidade (1,01) e o menor coeficiente de variação (CV = 4%), evidenciando sua maior precisão e menor dispersão.

No caso dos dentes que sofreram ruína por escoamento da armadura de suspensão, observou-se que todos os métodos analíticos apresentaram médias em torno de 1,10, mas com elevados coeficientes de variação (CV = 40%). A exceção foi a norma europeia (NP EN 1992-1-1:2010), que apresentou superestimação mais acentuada (média = 1,66; CV = 38%). O modelo numérico, por sua vez, demonstrou excelente concordância com os resultados experimentais (média = 1,00; CV = 16%).

Por fim, para o mecanismo de falha por esmagamento da biela de compressão, os modelos analíticos apresentaram maior variabilidade. Destaca-se a subestimação pela ABNT NBR 9062:2017 (média = 0,36; CV = 22%) e a superestimação por El Debs (2017) e pela NP EN 1992-1-1:2010 (médias de 1,60 e 1,53; CV de 24% e 16%, respectivamente). O modelo numérico, por outro lado, apresentou a média mais próxima da unidade (0,98) e coeficiente de variação de 14%, indicando desempenho satisfatório, mesmo diante da complexidade envolvida na modelagem da ruína por compressão.

Diante dos resultados obtidos, ressalta-se a necessidade de revisão dos critérios normativos brasileiros, especialmente no que se refere à estimativa da resistência à compressão na região do dente de concreto. Em contrapartida, o modelo numérico proposto manteve boa aderência aos resultados experimentais em todos os tipos de ruína analisados, inclusive nas falhas por compressão.

- Quanto à avaliação da influência do espalhamento da armadura de suspensão:

As análises paramétricas realizadas permitiram concluir que o espalhamento da armadura de suspensão tem certo impacto no comportamento estrutural dos dentes de concreto. Observou-se que, para maiores espalhamentos, a primeira camada da armadura de suspensão é a mais solicitada, enquanto para menores espalhamentos, a tensão se distribui de forma mais homogênea entre as camadas da armadura.

Em relação às forças máximas, verificou-se que elas foram semelhantes independentemente do espalhamento, mas a distância entre a carga de escoamento da primeira camada e a carga última aumentou com o aumento do espalhamento. Para espalhamentos de $0,40d_{viga}$ e $0,50d_{viga}$, o escoamento da primeira camada ocorreu a uma carga relativamente baixa, indicando que a armadura de suspensão não foi utilizada de forma otimizada, pois as camadas subsequentes não foram plenamente aproveitadas.

Por outro lado, o comportamento estrutural dos dentes mostrou-se insensível a variações no espalhamento da armadura de suspensão quando este variou entre $0,20d_{viga}$ e $0,33d_{viga}$,

com os valores de força última e deslocamento máximo mantendo-se dentro de níveis semelhantes.

Esses resultados se mantiveram consistentes, independentemente das propriedades do concreto e da geometria do dente, evidenciando a aplicabilidade em diferentes cenários.

A ABNT NBR 9062:2017 recomenda a distribuição da armadura até $0,25d_{viga}$, mas os resultados numéricos indicaram que distribuições até $0,33d_{viga}$ não alteram significativamente o desempenho estrutural, sugerindo a possibilidade de revisão da norma para permitir valores até $0,30d_{viga}$.

- Quanto à investigação do efeito das armaduras de costura:

Para investigar a influência da armadura de costura no comportamento estrutural dos dentes de concreto, foram analisados três casos de dimensionamento, resultando em diferentes quantidades de armaduras. Os Casos 1, 2 e 3 corresponderam a dimensionamentos para uma tensão adimensional $F/(b \cdot d \cdot f_c)$ na região do dente igual a 0,1, 0,15 e 0,2, respectivamente.

De modo geral, observou-se que, ao se considerar a armadura de costura no Caso 1, o erro $F_{última}/F_{dim}$ variou de 1,00 a 1,13, a depender das propriedades do concreto adotadas no dimensionamento. No Caso 2, essa razão variou de 0,82 a 1,20, enquanto no Caso 3 os valores ficaram entre 0,71 e 0,92. Na ausência de armadura de costura, os resultados foram distintos: no Caso 1, a razão $F_{última}/F_{dim}$ variou de 1,09 a 1,19; no Caso 2, de 0,85 a 0,97; e, no Caso 3, a força última atingida correspondeu a valores entre 0,76 e 0,89 da força utilizada no dimensionamento.

É importante ressaltar que, no Caso de dimensionamento 3, embora tenha sido adotada uma tensão de cisalhamento adimensional $F_{dim}/(b \cdot d \cdot f_c)$ igual a 0,2, a tensão efetivamente alcançada limitou-se, em média, a 0,17 nos modelos com armadura de costura. Embora o ACI 318:2019 recomende um limite de 0,2 para essa tensão, os resultados obtidos corroboram a recomendação de El Debs (2017), que sugere um valor máximo de 0,17

A abertura de fissuras foi identificada a partir das deformações plásticas obtidas numericamente. De modo geral, observou-se que os dentes com armadura de costura apresentaram deformações plásticas menores do que aqueles sem essa armadura. Assim, concluiu-se que a presença da armadura de costura desempenhou um papel relevante na mitigação da propagação de fissuras, independentemente do caso de dimensionamento.

De forma geral, as análises paramétricas realizadas demonstraram que a presença da armadura de costura foi fundamental para o controle da propagação de fissuras. No entanto,

ganhos em resistência e ductilidade foram observados apenas nos casos com maiores parâmetros de cisalhamento, sendo a avaliação da ductilidade realizada de forma qualitativa, com base no comportamento das curvas de carga versus deslocamento. Para os casos com menores valores de cisalhamento, embora tenha havido um controle mais eficaz da propagação de fissuras, não se verificaram aumentos significativos nem em resistência, nem em ductilidade.

Dentro do escopo da pesquisa, tais conclusões foram verificadas independentemente das propriedades do concreto e das geometrias das vigas analisadas.

- Quanto à verificação da tensão de compressão no concreto na região do dente:

A proposta de verificação das tensões de compressão no concreto na região superior da biela do dente, apresentada por Silva (2017), mostrou-se aplicável. No presente estudo, os resultados alcançados para os dentes que apresentaram escoamento da armadura de suspensão, ao se aplicar a metodologia de Silva (2017), apresentaram uma média de 1,18, com um coeficiente de variação de 27%, quando comparados aos resultados numéricos.

Ainda que os valores apresentem certa dispersão, considerando a complexidade do fenômeno em questão, a proposta de Silva (2017) estimou de forma satisfatória as tensões de compressão no concreto nas regiões dos dentes analisados. Os resultados mostraram-se compatíveis com os obtidos numericamente e evidenciaram o potencial da metodologia para substituir os critérios subjetivos atualmente adotados pelas normas brasileiras.

6.1 Sugestões para trabalhos futuros

A fim de ampliar o conhecimento sobre o tema, sugerem-se os seguintes estudos futuros:

- Realização de análises experimentais que permitam validar os resultados obtidos por meio das modelagens numéricas, especialmente no que se refere ao espalhamento da armadura de suspensão e à eficácia das armaduras de costura;
- Investigação do comportamento estrutural a partir da utilização de outras taxas de armadura de costura em dentes dimensionados para diferentes tensões de cisalhamento;
- Validação da proposta de Silva (2017) para a verificação das tensões de compressão tanto na região de apoio do dente quanto na região inferior da viga, por meio de simulações numéricas.

REFERÊNCIAS

- ABAQUS. **ABAQUS User's Manual. Simulia Corporation ABAQUS v.6.14.** Providence, Rhode Island, USA: Dassault Systèmes, 2017.
- ABDUL-JAWAD, H. M. Modelling of dapped-end beams using Abaqus software. **International Journal of Civil Engineering and Technology**, v. 9, p. 1-10, 2018.
- ABEYSINGHA, T.; PADMASIRI, P.; YAPA, H. Strength prediction of structurally deficient dapped end beams. *In: SOCIETY OF STRUCTURAL ENGINEERS SRI LANKA (SSESL) ANNUAL SESSIONS*, 2023.
- AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **ACI 318: Building code requirements for structural concrete (ACI 318-19) and Commentary (ACI 318R-19).** Farmington Hills: ACI, 2019.
- AKSOYLU, C.; ÖZKILIÇ, Y.; ARSLAN, M. Experimental and numerical investigation of shear strength at dapped end beams having different shear span and recess corner length. **Structures**, v. 48, p. 79-90, 2023.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto – Procedimento.** Rio de Janeiro: ABNT, 2023.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 9062: Projeto e execução de estruturas de concreto pré-moldado.** Rio de Janeiro: ABNT, 2017.
- ASWIN, M.; MOHAMMED, B.S.; LIEW, M.S.; SYED, Z.I. Root cause of reinforced concrete dapped-end beams failure. **International Journal of Applied Engineering Research**, v. 10, p. 42927-42933, 2015.
- BIRKELAND, P.W.; BIRKELAND, H.W. Connections in precast concrete constructions. **ACI Journal**, v. 63, p. 345-368, 1966.
- COOK, W. D.; MITCHELL, D. Studies of disturbed regions near discontinuities in reinforced concrete members. **ACI Structural Journal**, v.85, n.2, p.206-216, 1988.
- DON, W.; SURYANTO, B.; TAMBUSAY, A.; SUPROBO, P. Forensic assessments of the influence of reinforcement detailing in reinforced concrete half-joints: A nonlinear finite element study. **Structures**, v. 38, p. 689-703, 2022.
- EL DEBS, M. K. **Concreto pré-moldado: fundamentos e aplicações.** 2 ed. São Paulo: Oficina de Textos, 2017.
- EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION. **NP EN 1992-1-1: Eurocode 2 – Design of concrete structures. Part 1-1: General rules and rules for buildings.** Bruxelas, 2010.
- EUROPEAN CONCRETE PLATFORM ASBL. **Eurocode 2: worked examples.** Brussels: Jean-Pierre Jacobs – European Concrete Platform ASBL, 2008.

FALCÓN, J. **Estudio del comportamiento em servicio y rotura de los apoyos a media madera**. 2015. Tese (Doutorado em Engenharia da Construção) – Escola Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Universitat Politècnica de València, Espanha, 2015.

FALCÓN, J.; PALLARÉS, L.; MIGUEL, P. Proposal and experimental validation of simplified strut-and-tie models on dapped-end beams. **Engineering Structures**, v. 183, p. 594-609, 2019.

FALCÓN, J. M.; YU, K. L.; RUBIO, L. P.; SOSA, P. M. Experimental and analytical investigation of the crack behaviour of dapped-end beams. **Engineering Structures**, v. 322, 119040, 2025.

HENZE, L. **Querkräfttragverhalten von Stahlbeton-Fahrbahnplatten**. 2019. Tese (Doutorado em Engenharia) – Institute for Concrete Structures, Technische Universität Hamburg, Hamburg, 2019.

HERMANSEN, B. R.; COWAN, J. Modified shear-friction theory for bracket design. **Journal Proceedings**, p. 55-60, 1974.

HORDIJK, D. A. Tensile and tensile fatigue behaviour of concrete; experiments, modelling and analyses. **Heron**, v. 37, n. 1, 1992.

HUANG, P. -C.; NANNI, A. **Dapped-end strengthening of precast prestressed concrete double tee beams with FRP composites**. 2000. 144p. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – University of Missouri-Rolla, Rolla, 2000.

INTERNATIONAL FEDERATION FOR PRESTRESSING. **Practical design of structural concrete**. FIP Recommendations. FIP Commission 3 on Practical Design Working Group on Recommendations for Practical Design of Structural Concrete. SETO: London UK, 1999.

INTERNATIONAL FEDERATION FOR STRUCTURAL CONCRETE. CEB-FIP. **Model code 2010**: first complete draft. v. 1. Lausanne: FIB, 2010.

INTERNATIONAL FEDERATION FOR STRUCTURAL CONCRETE. CEB-FIP. **Model code 2010**: first complete draft. v. 2. Lausanne: FIB, 2010.

KRÄTZIG, W. B.; PÖLLING, R. An elasto-plastic damage model for reinforced concrete with minimum number of material parameters. **Computers & Structures**, v. 82, n. 15-16, p. 1201-1215, 2004.

LEITE JR, G. S.; MORENO JR, A. L. Vigas de concreto com apoio de altura reduzida. **Teoria e Prática na Engenharia Civil**, n.8, p.39-51, 2006.

LEONHARDT, F.; MÖNNIG, E. **Construções de concreto**: princípios básicos sobre a armação de estruturas de concreto armado. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

LU, W. -Y.; CHEN, T. -C.; LIN, I. -J. Shear strength of reinforced concrete dapped-end beams with shear span-to-depth ratios larger than unity. **Journal of Marine Science and Technology**, v. 23, n. 4, p. 431-442, 2015.

- LU, W. -Y. *et al.* Shear strength of high-strength concrete dapped-end beams. **Journal of the Chinese Institute of Engineers**, v. 26, n. 5, p. 671-680, 2003.
- LU, W. -Y.; LIN, I. -J; YU, H. -W. Behavior of reinforced concrete dapped-end beams. **Magazine of Concrete Research**, v. 64, n. 9, p. 793-805, 2012.
- MASÉNAS, V.; MEŠKÉNAS, A.; VALIVONIS, J. Analysis of the bearing capacity of reinforced concrete dapped-end beams. **Applied Sciences**, v. 13, 5228, 2023.
- MATTOCK, A. H. Discussion of the paper "Modified Shear-Friction Theory for Bracket Design". **ACI Journal**, v. 71, n. 8, p. 421-423, 1974.
- MATTOCK, A. H.; CHAN, T. C. Design and behavior of dapped-end beams. **PCI Journal**, v.24, n.6, p.28-45, 1979.
- MATTOCK, A. Strut-and-tie models for dapped-end beams. **Concrete International**, v. 34, n. 2, p. 35-40, 2012.
- MAST, R. F. Auxiliary reinforcement in concrete connections. **Journal of the Structural Division**, v. 17, n. 6, p. 1485-1504, 1968.
- MELO, S. T. **Um estudo sobre vigas com apoios em dente**. 1991. 161p. Dissertação (Mestrado de Ciência em Engenharia Civil) – COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1991.
- MENICHINI, G.; GUSELLA, F.; MORANO, S. G.; ORLANDO, M. RC dapped-end beams with various reinforcement layouts: an experimental investigation. **Engineering Structures**, v. 322, 119043, 2025.
- MENICHINI, G.; GUSELLA, F.; ORLANDO, M. Methods for evaluating the ultimate capacity of existing RC half-joints. **Engineering Structures**, v. 299, 117087, 2024.
- MIHAYLOV, B. I. Model for rapid evaluation of corner crack widths in reinforced concrete dapped-end connections. **Engineering Structures**, v. 303, 117497, 2024.
- MOHAMMED, B. S.; ASWIN, M.; LIEW, M. S. Prediction of failure load of RC and R-ECC dapped-end beams. **Case Studies in Construction Materials**, v. 13, n. e00433, 2020.
- MORENO-MARTÍNEZ, J.; MELI, R. Experimental study on the structural behavior of concrete dapped-end beams. **Engineering Structures**, v. 75, p. 152-163, 2014.
- PENG, T. **Influence of detailing on response of dapped end beams**. 2009. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Department of Civil Engineering and Applied Mechanics, McGill University, Montreal, 2009.
- POWELL, R. E.; FOSTER, S. J. **Experimental Investigation on Rectangular Corbels Cast in High Strength Concrete**. University of New South Wales, 1994.
- PRECAST/PRESTRESSED CONCRETE INSTITUTE. **PCI design handbook: precast and prestressed concrete**. 7th ed. Chicago, 2010.

RAJAPAKSE, C.; DEGÉE, H.; MIHAYLOV, B. Investigation of shear and flexural failures of dapped-end connections with orthogonal reinforcement. **Engineering Structures**, v. 260, n. 114233, 2022.

REGINATO, L. **Contribuição ao projeto de consolos de concreto com base em simulações numéricas**. 2020. Dissertação (Mestrado em Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2020.

SANDERS, D. Example 2: Dapped-end T-beam supported by an inverted T-beam. *In*: **ACI SP-208: Examples for the design of structural concrete with strut-and-tie models**. American Concrete Institute. Farmington Hills: Karl-Heinz Reineck. p. 91-103, 2002.

SANTOS, F. **Análise numérica de dentes de concreto armado**. 2022. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2022.

SCHLAICH, J.; SCHAFER, K.; JENNEWEIN, M. Toward a Consistent Design of Structural Concrete. **PCI Journal**, v. 32, p. 74-150, 1987.

SHAKIR, Q. M. Reinforced concrete dapped end beams – state of the art. **International Journal of Applied Science**, v. 1, p. 44-57, 2018.

SILVA, C. **Contribuição ao projeto de dentes de concreto para ligações em estruturas de concreto pré-moldado**. 2017. Dissertação (Mestrado em Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

SOUSA, A. M. D.; LANTSOGH, E. O. L.; GENIKOMSOU, A. S.; PRADO, L. P.; EL DEBS, M. K. NLFEA of one-way slabs in transition between shear and punching: Recommendations for modeling. **Engineering Structures**, v. 293, 116617, 2023.

SOUZA, S. T. M. **Estudo teórico-experimental de dentes de vigas Gerber de pontes de concreto armado**. 1997. Tese (Doutorado em Ciência em Engenharia Civil) – COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1997.

WANG, Q.; GUO, Z.; HOOGENBOOM, P. Experimental investigation on the shear capacity of RC dapped end beams and design recommendations. **Structural Engineering and Mechanics**, v. 21, n. 2, p. 221-235, 2005.

WIGHT, J. K.; MACGREGOR, J. G. **Reinforced concrete: mechanics and design**. 6th ed. New Jersey: Pearson, 2012.

YANG, K. -H.; ASHOUR, A. F.; LEE, J. -K. Shear strength of reinforced concrete dapped-end beams using mechanism analysis. **Magazine of Concrete Research**, v. 63, n. 2, p.81-97, 2011.

YU, T. *et al.* Finite element modeling of confined concrete-II: plastic-damage model. **Engineering Structures**, v. 32, n. 3, p. 680–691, 2010.

ZALOCHI, R. F. **Apoio de altura reduzida em vigas de concreto de alta resistência**. 1997. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1997.

ZALOCHI, R. F. **Investigação experimental de dentes de apoio de vigas de concreto armado: adição de fibras de aço e variação geométrica**. 2002. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2002.

